245

NOM : MEYER **Prénom :** Nicolas **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications. (245)

Autre sujet : Réf : Amar-Matheron, Analyse complexe ; Beck-Malick-Peyré, Objectif agrégation

Dans toute la leçon, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$

I. Généralités sur les fonctions holomorphes

1. $\mathbb{C}$-dérivabilité

Déf 1 : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si la limite
$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ existe dans $\mathbb{C}$

Ex 2 :
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $z \mapsto z^k$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$
- $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$

Prop 3 :
- La somme et le produit de 2 fonctions $\mathbb{C}$-dérivables en $a \in \Omega$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a.
- L'inverse d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en a ne s'annulant pas en a est $\mathbb{C}$-dérivable en a.

Déf 4 : Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, on dit que f est holomorphe sur Ω.

Prop 5 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$; les props suivantes sont équiv :
(1) f est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$
(2) f est $\mathbb{R}$-différentiable en a et $df(a)$ est une similitude directe.
(3) f est $\mathbb{R}$-différentiable en a et df_a est $\mathbb{C}$-linéaire
Dans ce cas, $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Prop 6 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$
f holomorphe sur $\Omega \iff f$ différentiable et $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ (Cauchy-Riemann)

2. Exemples

Prop 7 : Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ sur $D(0,R)$, alors f est holomorphe sur $D(0,R)$ et f' s'obtient en dérivant terme à terme :

Ex 8 : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

Déf 9 :
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$; on dit que
  - w est un logarithme de z si $e^w = z$
  - $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z si $z = |z| e^{i\theta}$
- On appelle détermination principale du logarithme (Log) et de l'argument (Arg) les fonctions :
  $\mathrm{Arg}(z) =$ l'unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$
  $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i \,\mathrm{Arg}(z)$
  pour $z \in \mathbb{C}^*$.

Prop 10 : Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

3. Analycité des fonctions holomorphes

Lemme 11 (Goursat) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, T un triangle $\subset \Omega$. Alors $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$

Théorème 12 (Cauchy) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, $K \subset \Omega$ compact à bord régulier ; alors $$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$$

Coro 13 : Tout fonction holomorphe est C^∞ et pour tout $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ t.q. $D(z_0, r) \subset \Omega$ $$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz}$$

Th 14 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, $D(z_0, r) \subset \Omega$
Alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

II. Conséquences de la théorie de Cauchy

1. Prolongement analytique

Th 15 : Supposons Ω connexe et f holomorphe sur Ω telle qu'il existe $z_0 \in \Omega$ vérifiant $f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n \geq 0$
Alors $f = 0$ sur Ω.

Appl 38 : Transformée de Fourier d'une gaussienne : $f(t) = \exp(-t^2)$

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)$$

D2

Appl 39 : I intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, dx < \infty$. Alors les polynômes orthogonaux associés à ce produit scalaire ($\langle f,g \rangle = \int_I f g \rho$) forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

III. Fonctions méromorphes - résidus

1. Séries de Laurent - singularité

On note $C_{a,r_1,r_2} := \{ z \in \mathbb{C} \,/\, r_1 < |z-a| < r_2 \}$ (couronne)

Déf 40 : Si f est holomorphe sur C_{a,r_1,r_2}, on définit pour $n \in \mathbb{Z}$ le n^e coefficient de Laurent par $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$

Il est indépendant de $r \in]r_1, r_2[$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ s'appelle alors série de Laurent de f.

Th 41 : Si f est holomorphe sur C_{a,r_1,r_2}, alors $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ avec $\sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n$ CVN sur les compacts de $\{|z-a| < r_2\}$ et $\sum_{n<0} c_n (z-a)^n$ CVN sur les ensembles du type $\{|z-a| \geq r\}$, $r > r_1$

Déf 42 : Soit f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ et $\sum c_n (z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f sur $C_{a,0,r}$. Trois cas sont possibles :

1. Singularité artificielle : $\forall n \leq 0$, $a_n = 0$
2. pôle : $\exists N > 0 \,/\, \forall n < -N$, $a_n = 0$
3. Singularité essentielle : $\{ n < 0, a_n \neq 0 \}$ est infini

Th 43 : a est une singularité artificielle ssi f est bornée au voisinage de a ssi f se prolonge en une fonct° holom. en a.

2. Fonctions méromorphes

Déf 44 : f est dite méromorphe sur Ω si $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$ où S est fermé discret et les singularités de f en S sont des pôles

Rque 45 : Si Ω est connexe, l'ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ des fonctions méromorphes est un corps.

Théo 46 : $\mathcal{M}(\Omega) = \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Omega))$ si Ω est connexe.

Exemple 47 : Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples. On a la formule : $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

Ex 48 : La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ ayant un seul pôle en $s = 1$, celui-ci étant simple.

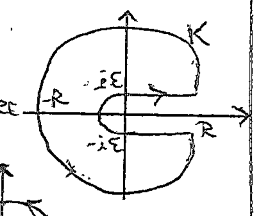
3. Résidus

Déf 49 : $f : C_{a,r_1,r_2} \to \mathbb{C}$ holomorphe ; le résidu de f en a est le coefficient c_{-1} du développement en série de Laurent de f en a. On le note $\mathrm{Res}(f,a)$!

Théorème 50 (résidus) f holomorphe sur $\Omega \setminus S$, S discret fermé $K \subset \Omega$ compact à bord régulier t.q $\partial K \cap S = \emptyset$

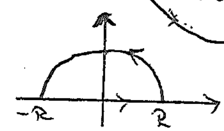
Alors $\int_{\partial K} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{a \in S \cap K} \mathrm{Res}(f,a)$

Application 51 : $\forall \alpha \in]0,1[$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ avec



Csq 52 : $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

Ex 52 : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$ avec



Déf 18' : Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de CV 1. Un point z_0 du cercle est dit régulier si f admet un prolongement analytique au voisinage de z_0, singulier sinon.

Th 18'' (lacunes d'Hadamard) Soit λ_n des entiers > 0 tq $\exists \alpha > 1 \,/\, \lambda_{n+1} \geq \alpha \lambda_n$. Soit $\sum a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon de convergence 1. Alors tous les points du cercle sont singuliers.

D 1

(*)

Ex 18''' : $\lambda_n = 2^n$ (λ_n suite géom)

<u>Cor 16</u> : Ω connexe, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes
S'il existe un ouvert non vide $V \subset \Omega$ tel que $f_{|V} = g_{|V}$, alors $f = g$.

<u>Coro 17</u> : Ω connexe ; alors $\mathcal{H}(\Omega)$ est un anneau intègre.

<u>Exc 18</u> : $\Gamma : P = \{\mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$
Γ est holomorphe sur P (vu plus tard) et se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

(*) → <u>Th 19</u> : Ω connexe ; $f \neq 0$; a zéro de f ; il existe alors un unique entier m et une unique fonction holomorphe g sur Ω tels que
$f(z) = (z-a)^m g(z)$ et $g(a) \neq 0$

<u>Déf 20</u> : L'entier m s'appelle la <u>multiplicité du zéro a</u> ; c'est le plus petit entier m tel que $f^{(m)}(a) \neq 0$.

<u>Coro 21</u> : Ω connexe ; f holomorphe $\neq 0$ sur Ω. Alors les zéros de f sont isolés ; l'ensemble des zéros de f est donc un fermé discret de Ω, donc est dénombrable.

2. <u>Inégalité de Cauchy et conséquences</u>

<u>Th 22</u> : Si f est holomorphe sur $D(z_0, R)$, alors
$\forall n \geq 0, \forall r \in]0, R[, \quad \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \sup_{z \in C(z_0, r)} \{|f(z)|\} r^{-n}$

<u>Coro 23</u> : Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante. (Liouville)

<u>Appl 24</u> : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (D'Alembert-Gauss)

3. <u>Principe du maximum</u>

<u>Déf 25</u> : Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie la <u>propriété de la moyenne</u> si $\forall D(z_0, R) \subset \Omega \quad u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$

<u>Prop 26</u> : Une fonction holomorphe vérifie la propriété de la moyenne.

<u>Prop 27</u> : Ω connexe, soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe ; si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante.

<u>Coro 28</u> : Si f est une fonction holomorphe non constante telle que $|f|$ admet un minimum local alors ce minimum est nul.

<u>Rque</u> : Cela redonne une démonstration de D'Alembert-Gauss.

<u>Th 29 (Ppe du max)</u> : Ω borné ; $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe sur Ω. Alors 1. $\forall z \in \Omega, |f(z)| \leq \sup_{\partial\Omega} |f|$
2. l'inégalité est stricte si $f \neq$ cste et Ω connexe

<u>Théorème 30 (Schwarz)</u> $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorphe, $f(0) = 0$, $|f| \leq 1$
Alors : 1. $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D(0,1)$
2. si $|f(z_0)| = |z_0|$ pour $z_0 \neq 0$, alors $f = \lambda\, \mathrm{id}$, avec $|\lambda| = 1$

<u>App 31</u> : Tout biholomorphisme de $\mathbb{C}$ est de la forme $z \mapsto az + b$.

4. <u>Suites de fonctions holomorphes</u>

<u>Rque 32</u> : On munit l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Cette topologie est métrisable via $d(f,g) = \sum_i 2^{-i} \frac{p_{K_i}(f-g)}{1 + p_{K_i}(f-g)}$ où $p_K(f) = \sup_K |f|$ et K_i est une exhaustion de compacts.

<u>Th. 33</u> (Weierstrass) $(f_n) \in \mathcal{H}(\Omega)$ $f_n \xrightarrow{u} f$ pour d. Alors :
1. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ 2. $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_n^{(k)} \xrightarrow{u} f^{(k)}$ pour d.

<u>Exc 34</u> : $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$

<u>Th 34 (Montel)</u> : Les compacts de $\mathcal{H}(\Omega)$ sont les fermés bornés.

<u>Appl 35</u> : $\mathcal{H}(\Omega)$ n'est pas normable.

5. <u>Intégrales à paramètres</u>

<u>Th 36</u> : Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $F : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
1. $\forall z \in \Omega$; $t \mapsto F(z,t)$ est mesurable
2. $\forall t \in X$, $z \mapsto F(z,t)$ est holomorphe dans Ω
3. $\forall K$ compact $\subset \Omega$, $\exists u_K \in L^1(X, \mu) \,/\, |F(z,t)| \leq u_K(t) \quad \forall z, t$
Alors $z \mapsto \int_X F(z,t) d\mu(t)$ est holomorphe et on peut dériver sous $\int$.

<u>Exc 37</u> : $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ et vérifie $\forall z \in \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$