Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

1 Générateurs de $SO_3(\mathbb{R})$

Lemme 1. admis pour 204 Les renversements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, et sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.

Preuve. On rappelle qu'un renversement ρ est une symétrie orthogonale dont le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Dans une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) adaptée, sa matrice s'écrit donc

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, $-\rho$ est une réflexion par rapport au plan (e_1, e_2). Il suffit donc de montrer que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ s'écrit comme produit de deux réflexions : si $u = s_1 \circ s_2$, alors $u = (-s_1) \circ (-s_2) =: \rho_1 \circ \rho_2$.

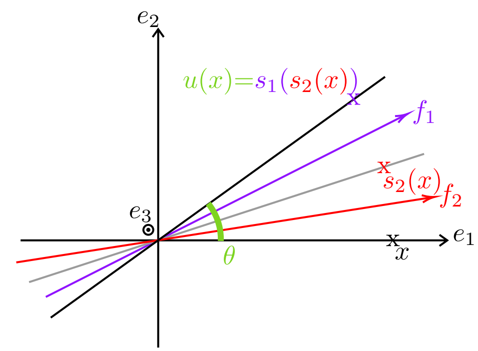
Soit $u \in SO_3(\mathbb{R})$. On suppose que u n'est pas déjà un renversement. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut supposer que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Soit $\mathscr{P}$ un plan contenant e_3, et soit s_2 une réflexion par rapport à ce plan. Alors, $s_1 := u \circ s_2^{-1}$ est une isométrie, et c'est une symétrie car

$$s_1^2 = u \circ (s_2\ u\ s_2^{-1}) = u \circ u^{-1} = id.$$

De plus, $s_1 \neq -id$ sinon u serait un renversement. Comme $\det s_1 = -1$, s_1 est une réflexion (en dimension 3, on n'a pas trop le choix...). Par exemple, $u = s_1 \circ s_2$, où s_i est la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}\{e_3, f_i\}$ comme ci-dessous (dessin dans le plan $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$).



De plus, les renversements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$ car $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, si ρ_1, ρ_2 sont deux renversements d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2, en fixant $h \in SO_3(\mathbb{R})$ tel que $h(\Delta_1) = \Delta_2$ (à savoir construire!), on a $\rho_2 = h\rho_1 h^{-1}$.

□

2 Preuve du "presque" théorème

Lemme 2. Soit G un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$ distingué, connexe par arcs, et non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$. Alors, $G = SO_3(\mathbb{R})$.

Preuve. On va montrer que G contient un renversement (une rotation d'angle π). Alors, comme G est distingué, G contiendra tous les renversements, qui engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, ce qui prouvera que $G = SO_3(\mathbb{R})$.

— Pour toute rotation $g \in G$ d'angle θ, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de g soit de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc $\mathrm{Tr} g = 2\cos\theta + 1$, donc l'application $\cos : g \in SO_3(\mathbb{R}) \mapsto \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Tr} g - 1}{2}$ est continue. Il suffit de montrer que la valeur -1 est atteinte : on va en fait montrer que la valeur 0 est atteinte, ce qui montrera qu'il existe $r \in SO_3(\mathbb{R})$ d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$. Alors, r^2 sera un renversement de G.

— On cherche d'abord un élément de G tel que $\cos\theta \leqslant 0$, en vue d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Fixons $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Quitte à remplacer g par g^{-1}, on peut supposer que g est une rotation d'angle $\theta \in]0, \pi]$.

1. Si $\cos\theta \leqslant 0$, alors $s = g$ convient.
2. Sinon, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Alors, pour $N = \left\lfloor \frac{\pi}{2\theta} \right\rfloor$, on a $(N+1)\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, donc $s = g^{N+1}$ convient. Ne pas détailler à l'oral : juste dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\cos(g^N) \leqslant 0$.

— Fixons γ un chemin reliant s à Id dans G (c'est possible car G est supposé connexe par arcs). L'application $\varphi : t \in [0,1] \mapsto \dfrac{\mathrm{Tr}(\gamma(t)) - 1}{2}$ est alors continue, vaut 1 en 0 et $\cos s \leqslant 0$ en 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Alors, $r := \gamma(t_0)$ est une rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$, puis $r^2 \in G$ est un renversement.

En définitive, G contient un renversement, donc les contient tous, donc $G = SO_3(\mathbb{R})$. □

3 Preuve du théorème

Soit G un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$.

Lemme 3. [FGN Al3, page 67] Admis, sauf pour 204 Soit G un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$. On note G_0 la composante connexe par arcs de Id dans G. Alors, G_0 est un sous-groupe de G, distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$ si G l'est.

Preuve.

1. Id $\in G_0$. Soient $g, h \in G_0$. Par définition de G_0, on peut trouver deux chemins (continus) γ_1 et γ_2 reliant respectivement g à Id, et h à Id dans G_0. Alors, le chemin $\gamma_3 : t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)^{-1}$ relie gh^{-1} à Id, donc $gh^{-1} \in G_0$. Cela montre que G_0 est un sous-groupe de G.
2. Supposons G distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$. Fixons $g \in G_0$, et soit $h \in SO_3(\mathbb{R})$: on veut montrer que $hgh^{-1} \in G_0$. Soit γ un chemin reliant g à Id dans G_0, et considérons le chemin $\widetilde{\gamma} : t \mapsto h\gamma(t)h^{-1}$.
   — Comme G est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$ et γ est tracé dans G, le chemin $\widetilde{\gamma}$ est tracé dans G.
   — $\widetilde{\gamma}(0) = \mathrm{Id}$ et $\widetilde{\gamma}(1) = hgh^{-1}$, donc $\widetilde{\gamma}$ relie Id à hgh^{-1}. Cela montre que $hgh^{-1} \in G_0$.

   Finalement, G_0 est distingué dans G.

□

Soit G_0 la composante connexe par arcs de Id : d'après le premier lemme, il s'agit d'un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$, connexe par arcs par définition.

— Si $G_0 \neq \{\mathrm{Id}\}$, le second lemme montre que $G_0 = SO_3(\mathbb{R})$, donc $G = SO_3(\mathbb{R})$.

— Si $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$, montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$. Remarquons d'abord que toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons : en effet, si $g_1, g_2 \in G$ sont joignables *via* γ dans G, alors $g_1^{-1}g_2$ et Id le sont *via* $g_1^{-1}\gamma$, donc $g_1^{-1}g_2 \in G_0 = \{\mathrm{Id}\}$, puis $g_1 = g_2$.
Soit $g \in G$. L'application

$$\psi : h \in SO_3(\mathbb{R}) \mapsto hgh^{-1} \in G$$

est continue par continuité du produit et de l'inverse matriciels. Comme $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, $\psi(SO_3(\mathbb{R}))$ l'est aussi. Puisque $g \in \psi(SO_3(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\psi(SO_3(\mathbb{R})) = \{g\}$. Autrement dit, $hgh^{-1} = g$ pour tout $h \in SO_3(\mathbb{R})$, donc $g \in Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{\mathrm{Id}\}$. Cela montre que $G = \{\mathrm{Id}\}$.

En définitive, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Remarques

— Convient pour les leçons 103, 106, 108, 161 et 204.

— Peut être énoncé dans la leçon 104, à titre d'exemple.

— à la toute fin, lorsqu'on montre que $G = \{\mathrm{Id}\}$, la rédaction est un peu différente de la référence.

— Pour faire tenir l'oral en 15mn, il ne faut pas traîner. Si on manque de temps, abréger la rédaction du fait que les composantes connexes par arcs de G sont des singletons.

— Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 3$, quels sont les générateurs de $O(E)$? De $SO(E)$? Donner une idée de la preuve (réponse dans *Cours d'algèbre*, Perrin).

— Quel est le centre de $O(E)$? De $SO(E)$? (réponse dans *Cours d'algèbre*, Perrin).

Références

[FGN Al3] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 3*, Cassini, 2009.