(244)*

NOM : MARTY Prénom : Théo Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse Leçon 244*

Sujet choisi : Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

Autre sujet :

Prérequis : séries entières

I) Fonction développable en série entière

Ici, U est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$.

1 Déf : f est développable en série entière (DSE) en $a \in U$ si il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul tel que sur un voisinage de a, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$.
f est analytique si f est DSE en tout $a \in U$.

2 Ex : Les polynômes sont DSE. Les fractions rationnelles sont DSE sur leur domaine de définition.

3 Prop : Soit f, g DSE en a. Alors $f+g$ et $f\times g$ sont DSE en a (par somme termes à termes et produit de Cauchy).

4 Prop : Soit f DSE en a et g DSE en $f(a)$. Alors $f \circ g$ est DSE en a.

5 Prop : Soit f DSE en a tel que $f'(a) \neq 0$. Alors f est localement bijective et f^{-1} est DSE en $f(a)$.

6 Prop : Une série entière de rayon de convergence $R>0$ est analytique sur $D(0,R)$.

Les propriétés 4 à 6 sont pénibles à démontrer sans la théorie des fonctions holomorphes (voir plus tard).

7 Prop : Les fonctions analytiques sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (au sens réel ou complexe) et ses dérivées sont analytiques et s'obtiennent en dérivant termes à termes les DSE.
De plus si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$ au voisinage de a, alors $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

II) Le cas réel, $U \subset \mathbb{R}$

8 Rq : Pour les fonctions à variable réelle, analytique $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$, mais la réciproque est fausse.

9 Ex : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas DSE en 0.

10 Théorème : (de réalisation de Borel)
Pour toute suite $(a_n)_n$ réelle, il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$.] DEV 1
La différence avec f DSE est qu'il faut $\limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \neq +\infty$ pour que f ai une chance d'être DSE en 0.

11 Th : Taylor reste intégral.
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $x, c \in]a,b[$.
Alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$
On note $R_n(x)$ l'intégrale précédente.

12 Prop : f est DSE en c si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout x assez proche de c.

13 Th : (de Bernstein)
Soit $a<b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. Alors f est analytique.

14 Ex : $\tan$ est analytique.

15 Exo : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$. f est analytique ssi pour tout segment $J \subset I$, il existe $C, r > 0$ tel que $\forall x \in J, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq C r^n n!$

16 Th : (Équation de Bessel)
$(E) : xy'' + y' + xy = 0$. (E) admet une unique solution f DSE en 0 tel que $f(0) = 1$.
$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$. De plus toute solution sur $]0,\alpha[$ avec $\alpha>0$ et linéairement indépendante de f est non bornée. On en déduit $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin\theta)\,d\theta$.

III) Fonction holomorphe, $U \subset \mathbb{C}$

17 Déf : f est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in U$ si $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ a une limite quand $z \xrightarrow[z\neq a]{} a$. On note $f'(a)$ la limite.
f est holomorphe sur U si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. On note alors $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

18 Ex : Les séries entières et les fonctions analytiques sont holomorphes. $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

19 Ex : On définit pour $z \in \mathbb{C}$:
- si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$
- si $\mathrm{Re}(z) > 1$, $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$

Alors Γ et ζ sont holomorphes.

20 Prop : Soit $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Alors $f+g \in \mathcal{O}(U)$ et $fg \in \mathcal{O}(U)$.
De plus si $f' \neq 0$ sur U et f injective, alors f^{-1} est holomorphe.
Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ et $g \in \mathcal{O}(V)$ tel que $f(U) \subset V$, alors $g \circ f \in \mathcal{O}(U)$

21 Th : Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,R))$, $R > 0$. Alors il existe une série entière de rayon de convergence $\geq R$ qui coïncide avec f sur $D(0,R)$.
En particulier, $f \in \mathcal{O}(U)$ ssi f est analytique sur U.

22 Th : (des zéros isolés).
Soit U connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si $f^{-1}(\{0\})$ admet un point d'accumulation dans U, alors f est nulle.

23 Contre exemple : $f(z) = \sin(\frac{1}{z}) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ et admet une suite de zéro qui tend vers zéro.

24 Déf : Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$. On définit $\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f \circ \gamma(t) \gamma'(t) dt$

25 Th : (Formule de Cauchy)
Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ au voisinage de a, alors pour tout $R > 0$ tel que $D(a,R) \subset U$, on a $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,R)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$.

26 Conséquence : Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M(|z|^n + 1)$. Alors $f \in \mathbb{C}_n[z]$. En particulier, si f est bornée, alors f est constante (Liouville)

27 Th : (Alembert-Gauss) : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

28 Rq : Les fonctions holomorphes vérifient la propriété de la moyenne : si $D(a,R) \subset U$ alors $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta$

29 Th : (Principe du maximum)
Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ et V compact tel que $\overline{V} \subset U$. Alors $\sup_{z \in \overline{V}} |f(z)|$ est atteind
(U connexe)
au bord de V, et s'il est aussi atteind à l'interieur alors f est constante.

30 Th : (lemme de Schwarz).
Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$. On suppose que $f(0) = 0$ et $|f| \leq 1$.
Alors pour tout $|z| < 1$, $|f(z)| \leq |z|$. Si de plus $\exists z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\forall |z| < 1$, $f(z) = \lambda z$.

IV) Singularité ← plus d'exples

31 Th : Soit f holomorphe sur $U = \{a < |z| < b\}$. Alors il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que $R(\sum_{n \geq 0} a_n z^n) \geq b$ $R(\sum_{n \geq 0} a_{-n} z^n) \geq \frac{1}{a}$ et $\forall |z| \in U$, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$. On dit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ est la série de Laurent de f en 0. Elle est unique et vérifie la formule de Cauchy.

32 ~~30~~ Th : Supposons $a = 0$. Il y a trois possibilités : ~~(Schwarz)~~
- f est bornée au voisinage de zéro ($\Leftrightarrow \forall n < 0, a_n = 0$). Alors f se prolonge analytiquement en zéro.
- $\{a_n \neq 0, n < 0\} \neq \emptyset$ et fini. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $z^k f(z)$ est prolongeable en une fonction holomorphe en 0. Le plus petit k vérifiant cela est l'ordre du pôle 0 def.
- $\{a_n \neq 0, n < 0\}$ est infini. On dit que 0 est une singularité essencielle de f. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathrm{Im}(D(0,\varepsilon) \setminus \{0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$. Un théorème de Picard affirme même que ça ne

33 peut être que $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ privé d'un point (l'image de la boule).

34 Ex :
- Les bijections holomorphes de $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$. (1^{er} cas)
- $\frac{\sin z}{z}$ se prolonge en 0
- $\exp(\frac{1}{z})$ est dans le 3^e cas.

32 Déf: Soit f holomorphe sur $D(a,R)\setminus\{a\}$. On définit le résidu de f en a par $\mathrm{Res}(f,a) = a_{-1}$ où a_{-1} est le terme en $\frac{1}{z}$ dans la décomposition en série de Laurent de $f(z-a)$.

33 Th: (des résidus)
Soit $V \subset U$ un ouvert bornée par un chemin γ à valeur dans U tel que γ est $\mathcal{C}^1$ et ne passe par aucun pôle de f. Alors
$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in P} \mathrm{Res}(f,a)$$ où P est l'ensemble des pôles de f inclus dans V.

34 Ex: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi e^{-t}}{4}(\sin t + \cos t)$ se démontre en intégrant $\dfrac{e^{itz}}{z^4+4}$ sur le contour 

et en effectuant $R \to +\infty$

IV) Prolongement analytique

35 Th: (prolongement analytique)
Soit U connexe et f, g analytique sur U. Supposons que f et g coïncident sur un ensemble non discret de U, alors $f = g$.

36 Rq: Il y a unicité d'un prolongement analytique sur un domaine connexe. S'il existe, il est donc canonique.

37 Ex: Soit D une demi droite de $\mathbb{C}$ d'extrémité 0, et différente de $\mathbb{R}^+$. Alors il existe un prolongement analytique du logarithme réel à $\mathbb{C}\setminus D$.
De plus si $D \neq D'$, les prolongements à $\mathbb{C}\setminus D$ et $\mathbb{C}\setminus D'$ diffèrent de $2i\pi$ sur la composante connexe qui ne contient pas 0.

38 Th: Γ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$. Elle a pour pôle $-\mathbb{N}$ et ne s'annule pas
Elle vérifie de plus les deux équations :
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$

39 Th: ζ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

40 Déf: Soit f une série entière de rayon de convergence R fini et non nul. Soit $x \in \partial D(0,R)$.
On dit que x est régulier si f se prolonge analytiquement au voisinage de x. Sinon x est dit singulier.
On note $\mathrm{Sing}\, f$ l'ensemble de ses points singuliers.

41 Th: $\mathrm{Sing}\, f$ est fermé et non vide.

42 Ex: $\mathrm{Sing}\left(\sum_{n\geq 0} z^n\right) = \{1\}$

43 Th: (lacunes d'Hadamard)
Soit $(\lambda_n)_n$ une suite d'entier et $c > 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq c$. Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$ une série entière de rayon de convergence 1. Alors $\mathrm{Sing}(f) = \partial D(0,1)$. DEV2

Références :

Beck : Obj. Agreg.
Cartan : Théorie élémentaire des fonctions analytique d'une ou plusieurs variables complexes
Saint Raymond : Topologie, calcul différentiel et variable complexe
FGN analyse 2.

| Questions Plan |

- Thm 30 (Schwarz). Dém ?

↳ • $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorph. On supp $f(0)=0$. f DSE en 0, $\forall |z|<1$

$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$. $g(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n$ est holomorf g DSE sur

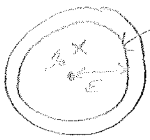
$D(0,\varepsilon)$ où $\varepsilon \in]0,1[$. Alors $|g|$ atteint son maximum en $z_\varepsilon \in D(0,\varepsilon)$.

Donc $\forall |z| \leq \varepsilon$, $|g(z)| \leq |g(z_\varepsilon)| \leq \left|\frac{f(z_\varepsilon)}{z_\varepsilon}\right|$.

Donc $\limsup_{\varepsilon \to 1} |g(z_\varepsilon)| = \limsup_{\varepsilon \to 1} |f(z_\varepsilon)| \leq 1$.

Donc $\forall |z|<1$, $|g(z)| \leq 1$ Donc $\forall |z|<1$, $|f(z)| \leq |z|$.

• Si on a égalité en z_0 :



appliquer le ppe du maximum sur $D(0,\varepsilon)$ ou $\varepsilon > |z_0|$

$|g|$ cste. Et $\lambda = \left|\frac{f(z)}{z}\right|$

sur le bord.

Exercices

- $a_n \geq 0$. $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de cvg $R > 0$
  Que peut-on dire des sg de la fonc° ?

↳ Dans le cas $a_n = 1$ (ie $f(z) = \sum z^n$), seul pt de sg $= 1$.

Peut-on montrer que $z = R$ est tjs un pt de sg ?

Est ce qu'on peut avoir une série ent. tq $\sum a_n R^n$ cvg ?

Oui. exple : $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $\underline{R = 1}$ et $\sum \frac{1}{n^2} = 1$

↳ (dém : d'Alembert ou dériver $2x \to \sum z^n$ de rayon 1)

<u>Réf</u> : Hille, ZQ (compliqué)

- Mq $z \mapsto z^2$ est une appli ouverte (ie l'image d'un ouvert est un ouvert)

↳ Soit U ouvert $\subset \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in U$.

Si $z_0 \neq 0$, $f'(z_0) \neq 0$ dc par inversion locale, $\exists V \overset{\subset U}{}$ voisinage de z_0 tq $f(V)$ est ouvert.

Si $z_0 = 0$, $\exists \varepsilon$ $D(0, \varepsilon) \subset U$. Donc $\forall |z| < \varepsilon^2$, $\exists \tilde{z} \in \mathbb{C}$, $\tilde{z}^2 = z$ et alors $|\tilde{z}| = \sqrt{|z|} < \varepsilon$ dc $z \in f(D(0,\varepsilon))$. Donc $D(0, \varepsilon^2) \subset f(D(0,\varepsilon)) \subset f(U)$.

Développement 1 :

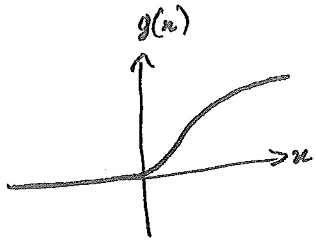
Théorème de réalisation de Borel.

Théorème : Soit $(a_n)_n$ une suite de réels. Il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$

Lemme : Il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que
$\forall |x| \leq 1,\ \varphi(x) = 1$
$\forall |x| \geq 2,\ \varphi(x) = 0$

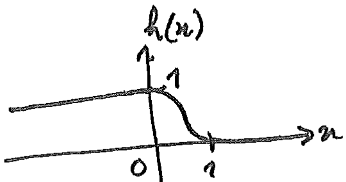
Démonstration :

* On construit d'abord $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

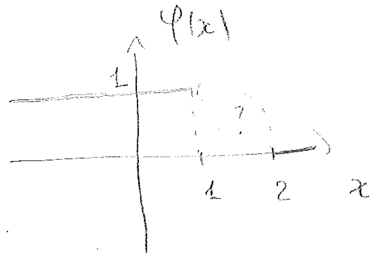


g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
On montre par récurrence immédiate sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$\forall x > 0,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$
Ainsi $g^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et $g^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$. Donc g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = 0$.

* Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{g(g(1) - g(x))}{g \circ g(1)}$. h est de classe $\mathcal{C}^1$ et



$\forall x \geq 1,\ g(1) - g(x) \leq 0$ donc $h(x) = 0$
$\forall x \leq 0,\ g(x) = 0$ donc $h(x) = 1$



* Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x-1)h(-x-1)$. Alors φ convient

---

Démonstration du théorème :

* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose $M_n = \max_{k \leq n} \|\varphi_n^{(k)}\|_\infty$ qui est fini car les $\varphi_n^{(k)}$ sont à support compact.

$\frac{a_n \Pi_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\frac{1+n^2(1+a_n\Pi_n)}{a_n\Pi_n}} \quad \frac{1}{\frac{1}{a_n\Pi_n} + \frac{n^2}{a_n\Pi_n} + n^2}$

On définit $\lambda_n = 1 + n^2(1 + a_n \Pi_n)$. $\neq 0$

Alors $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sum \left| \frac{a_n \Pi_n}{\lambda_n} \right| < +\infty$

* Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \varphi(\lambda_n x) = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda_n^{-n} \varphi_n(\lambda_n x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$f(0)$ est définit et vaut a_0. De plus pour tout $x \neq 0$, $|\lambda_n x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc pour n assez grand, $\varphi(\lambda_n x) = 0$. Donc $f(x)$ est bien définit.

On note $g_n(x) = a_n \lambda_n^{-n} \varphi_n(\lambda_n x)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$.

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g_n^{(p)}(x) = a_n \lambda_n^{p-n} \varphi_n^{(p)}(\lambda_n x)$

Donc $\sum_{n>p} |g_n^{(p)}(x)| \leq \sum |a_n \lambda_n^{p-n} \varphi_n^{(p)}(\lambda_n x)|$

$\leq \sum \left| \frac{a_n \Pi_n}{\lambda_n} \right| < +\infty$

Donc $\sum_{n>p} g_n^{(p)}$ converge uniformément, donc f est de classe $\mathcal{C}^p$

et $f^{(p)}(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \lambda_n^{p-n} \varphi_n^{(p)}(\lambda_n x)$

f est donc $\mathcal{C}^\infty$.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ donc $\varphi_n(x) = x^n$.

Donc pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n^{(p)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq n \\ n! \text{ si } p = n \end{cases}$

Donc $f^{(p)}(0) = a_p \times p!$

D'où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

(Rqs / Questions Oral 1)

- $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$ dvg pr $\forall z \neq 0$ ($\forall r > 0$, $n!\, r^n \to +\infty$) mais pourtant on peut déf. une fonc° dt le dev en série de Taylor soit $\sum n!\, z^n$
- Condi° pr que la fonc° f ainsi déf soit holomorphe ? $\rightarrow R \geq 1$
- ———————————————— DSE ? $\rightarrow R = +\infty$:

(a_n) déf une fonc° entière ssi $R(\sum a_n z^n) = +\infty$ ssi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

Développement 2 :

Théorème : (lacunes d'Hadamard)

Soit $(\lambda_n)_n$ une suite d'entier et $c>1$ tel que $\forall n$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq c$.
Soit $f(z)$ une série entière de rayon de convergence 1 et de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$. Alors $\mathrm{Sing}(f) = \partial D(0,1)$.

1ère étape : on se ramène à $z=1$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$g(z) = f(e^{i\theta} z) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{i\lambda_n \theta} z^{\lambda_n}$ vérifie les hypothèse du théorème,

et $\quad 1 \in \mathrm{Sing}(g)$ si et seulement si $e^{i\theta} \in \mathrm{Sing}(f)$.

Donc il suffit de montrer que $1 \in \mathrm{Sing}(f)$.

2e étape : Construction de φ.

$\frac{p+1}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1 < c$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{p+1}{p} < c$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $p\lambda_{n+1} > (p+1)\lambda_n$.

Soit $\varphi(z) = \frac{z^p + z^{p+1}}{2} = z^p \frac{z+1}{2}$, $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(z)^{\lambda_n}$ est un polynôme dont les monomes sont de degré compris entre $p\lambda_n$ et $p+1\lambda_n$ (formule du binôme de Newton).

Or on sait que $(p+1)\lambda_{n-1} < p\lambda_n \leq (p+1)\lambda_n < p\lambda_{n+1}$.

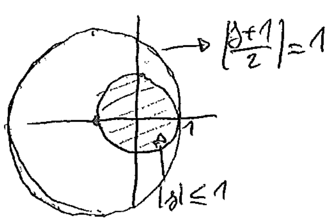
Donc les supports (en tant que polynôme) des $\varphi(z)^{\lambda_n}$ sont 2 à 2 disjoints.

3e étape : Supposons que f se prolonge analytiquement sur $D(0,1) \cup D(1,\eta)$ où $\eta > 0$.

Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(D(0,1+\varepsilon)) \subset D(0,1) \cup D(1,\eta)$

Soit $|z| \leq 1$. Alors $\left|\frac{z+1}{2}\right| \leq 1$ et $|\varphi(z)| \leq 1$.

De plus si $|\varphi(z)| = 1$ alors $\left|\frac{z+1}{2}\right| = 1$ donc $z = 1$



Donc $\varphi(\overline{D(0,1)}) \subset D(0,1) \cup D(1,\eta)$

φ est continue sur $\overline{D(0,2)}$ compact, donc elle y est uniformément continue. On note $D = D(0,1) \cup D(0,\eta)$.

$\mathbb{C}\setminus D$ est fermé et $\varphi(\overline{D(0,1)})$ est compact donc $\alpha := d(\mathbb{C}\setminus D, \varphi(\overline{D(0,1)})) > 0$

Soit $\beta<2$ donné par l'uniforme continuité de φ sur $\overline{D(0,2)}$ pour α.

Alors pour tout $z \in D(0,1+\beta)$, il existe $|z'|\leq 1$ tel que $|z-z'|<\beta$ et alors $|\varphi(z)-\varphi(z')|<\alpha$. Comme $\varphi(z') \in \varphi(\overline{D(0,1)})$, $\varphi(z) \notin \mathbb{C}\setminus D$.

Autrement dit $\varphi(D(0,1+\beta)) \subset D$.

<u>4e étape :</u> Conclure.

$f\circ\varphi : D(0,1+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe donc DSE en 0.

Donc il existe $(b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall |z| < 1+\varepsilon$,

$$f\circ\varphi(z) = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$$
$$= \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{z^{p+1}+z^p}{2}\right)^{\lambda_n}$$

Comme les $\varphi(z)^{\lambda_n}$ sont à support disjoints pour tout $N\in\mathbb{N}$,
$$\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{z^{p+1}+z^p}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_N} b_k z^k$$

Soit $z \in \,]1, 1+\beta[$. Alors $\left(\sum_{k=0}^{(p+1)\lambda_N} b_k z^k\right)_N$ converge vers $f\circ\varphi(z)$.

Or $\frac{z^{p+1}+z^p}{2} > 1$ donc $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{z^{p+1}+z^p}{2}\right)^{\lambda_n}\right)_N$ diverge grossièrement (et $\sum a_n z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1). D'où la contradiction

Donc $1 \in \mathrm{Sing}(f)$.