Rombaldi p404

UN THÉORÈME DE LIOUVILLE

126, 142

Thm (LIOUVILLE) : Pour $n \geq 3$, l'équation (1) : $P^n + Q^n + R^n = 0$ n'admet pas de solution non triviale (i.e. P, Q, R sont associés) dans $K[X]$, avec K un corps commutatif de caractéristique nulle.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une solution non triviale (P, Q, R). Quitte à renommer, supposons que $1 \leq p \leq q \leq r$, où $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)$ et $r = \deg(R)$. En particulier, $PQR \neq 0$ (car K est intègre) donc $D := P \wedge Q \wedge R \neq 0$. De là, $\left(\frac{P}{D}, \frac{Q}{D}, \frac{R}{D}\right)$ est une autre solution de (1). Justifions que $\deg\left(\frac{P}{D}\right) \geq 1$: par l'absurde, supposons que $\frac{P}{D}$ est constant égal à α. D'après le lemme suivant, $\frac{Q}{D}$ et $\frac{R}{D}$ sont constants, égaux à β et γ.

Lemme : Soit $(A, B) \in K[X]^2$. Si $n \geq 2$ et $A^n + B^n$ est constant, alors A et B sont constants.

Preuve : Comme $A \wedge B \mid A^n + B^n$ et $A^n \wedge B^n$ est constant, $A \wedge B = 1$. De plus, $0 = (A^n + B^n)' = n(A'A^{n-1} + B'B^{n-1})$, et $n \neq 0$ puisque $\mathrm{car}(K) = 0$, donc $A'A^{n-1} = -B'B^{n-1}$, mais $n \geq 2$ donc $A \mid B'B^{n-1}$, mais $A \wedge B = 1$ donc (GAUSS) $A \mid B'$. De même, $B \mid A'$. Si A et B ne sont pas constants, alors $A' \neq 0$ et $B' \neq 0$, donc $\deg(A) \leq \deg(B')$ $= \deg(B) - 1 \leq \deg(A') - 1 = \deg(A) - 2$. Or $\deg(A) \geq 0$, c'est donc absurde. De là, A ou B est constant, mais $A^n + B^n = 0$ donc A et B sont constants

Ainsi, $P = \alpha D$, $Q = \beta D$ et $R = \gamma D$, donc P, Q et R sont associés, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $1 \leq \deg\left(\frac{P}{D}\right) \leq \deg\left(\frac{Q}{D}\right) \leq \deg\left(\frac{R}{D}\right)$: quitte à les remplacer, supposons que $P \wedge Q \wedge R = 1$.

Lemme : P, Q et R sont deux à deux premiers entre eux.

Preuve : Par l'absurde, supposons que $P \wedge Q$ admet un facteur irréductible π. Alors $\pi \mid P$ et $\pi \mid Q$, donc $\pi \mid R^n = -P^n - Q^n$. Or π est irréductible, donc premier (par factorialité de $K[X]$), donc $\pi \mid R$ (lemme d'EUCLIDE), donc $\pi \mid P \wedge Q \wedge R = 1$: π est irréductible, c'est donc absurde. Ainsi, $P \wedge Q = 1$. De même, $Q \wedge R = P \wedge R = 1$.

Comme $n \neq 0$ ($\mathrm{car}(K) = 0$), on peut considérer l'équation (2) $= (1) \times P' - \frac{1}{n}(1)' \times P$: $(P^n + Q^n + R^n)P' - (P'P^{n-1} + Q'Q^{n-1} + R'R^{n-1})P = 0$, i.e. $Q^{n-1}(QP' - Q'P) = -R^{n-1}(RP' - R'P)$. Alors $R^{n-1} \mid Q^{n-1}(QP' - Q'P)$, mais $R^{n-1} \wedge Q^{n-1} = 1$ donc (GAUSS) $R^{n-1} \mid QP' - Q'P$. Or $QP' - Q'P \neq 0$: en effet, dans le cas contraire, $Q \mid Q'P$, mais $Q \wedge P = 1$ donc (GAUSS) $Q \mid Q'$, mais Q n'est pas constant donc c'est impossible. Ainsi,

$$(n-1)r = \deg(R^{n-1}) \leq \deg(QP' - Q'P) \leq \max\{\deg(QP'), \deg(Q'P)\} \leq \max\{q+p-1, q-1+p\} \leq p+q-1 \leq 2r-1$$

et donc $(n-3)r \leq -1$. Or $r \geq 0$ et $n \geq 3$, c'est donc contradictoire. ∎

COMMENTAIRES :

- Le cas $n = 2$: $(X^2 - 1)^2 + (2X)^2 = (X^2 + 1)^2$
- Le cas en caractéristique $p > 0$: avec le morphisme de FROBENIUS, $P^p + Q^p = (P+Q)^p$
- Justification des recasages :
  - 142 : PGCD/PPCM : indubitablement, au regard de la preuve. Remarque : attention, "premiers entre eux dans leur ensemble" n'implique pas "2 à 2 premiers entre eux" en général !
  - 126 : Exemples d'équations en arithmétique : Bien que le rapport 2022 parle uniquement d'équations dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le titre n'interdit pas d'étudier l'arithmétique polynomiale. De plus, ce théorème illustre une similarité et une différence entre arithmétiques entière et polynomiale : le théorème de WILES-FERMAT, lui, est très difficile à montrer...