Plan 1/13

NOM : PELLET-MARY Prénom : Alice Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 232 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$. Exemples.

Autre sujet :

I) Introduction, vocabulaire :

Objectif de la leçon : étant donné une fonction f suffisament régulière et un élément x_0 proche de x tel que $f(x)=0$, on veut construire une suite (x_n) qui converge vers x.

1) Premier exemple : la méthode de dichotomie :

Théorème 1 : Si $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et s'annule une seule fois sur $[a,b]$ en changeant de signe, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} x_0=a \\ x_1=b \\ x_n=\dfrac{x_{n^+}+x_{n^-}}{2} & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$$

avec $n^+=\max\{m<n,\ f(x_m)\geq 0\}$

$n^-=\max\{m<n,\ f(x_m)\leq 0\}$

Alors la suite (x_n) converge vers $x\in[a,b]$ lorsque $n\to+\infty$ et $f(x)=0$.

ex 2 : $f(x)=x^2-2$, $[a,b]=[1,2]$, $x_n\to\sqrt{2}$

voir annexe 1.

Théorème 3 : Avec les mêmes notations qu'au théorème 1, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x_n-x|\leq\frac{1}{2^{n-1}}|x_1-x_0|$

↳ on gagne un bit de précision à chaque itération.

2) Vitesse de convergence

Dans toute la leçon, si $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}x$, $x_n,x\in\mathbb{R}^n$, on fixe une norme $\|\ \|$ de $\mathbb{R}^n$ et on écrira $e_n=\|x_n-x\|$ (erreur à l'étape n).

Définition 4 : La convergence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x est (au moins) d'ordre $p\in\mathbb{N}^*$ si $\exists C\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geq n_0$, $e_{n+1}\leq Ce_n^p$ (avec $C<1$ si $p=1$).

- Si $p=1$, on parle de convergence géométrique
- Si $p=2$, on parle de convergence quadratique.

Remarque 5 : Si $p=1$, on gagne en précision un nombre constant de bit à chaque itération.

- Si $p>1$, on multiplie le nombre de bits corrects par p à chaque fois.

↳ grosse différence entre $p=1$ et $p>1$.

3) Théorème de point fixe de Picard :

Pour justifier la convergence de certaines méthodes, on aura besoin du théorème suivant :

Théorème 6 (Picard) : soit E un espace de Banach. Soit $\varphi: A\subset E\to E$ (A fermé) telle que :
- $\varphi(A)\subset A$
- φ est K-contractante pour un certain $K\in]0,1[$

Alors φ admet un unique point fixe $y\in A$.
De plus, pour tout $y_0\in A$, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_{n+1}=\varphi(y_n)=\varphi^{n+1}(y_0)$ converge vers y.

Si de plus (si $E=\mathbb{R}^n$ et) φ est C^2 et $D\varphi_y$ est nul, alors la convergence de (y_n) vers y est au moins quadratique.

Dvpt 1 + page d'après

Références : Dumas, modélisation à l'oral de l'agreg ← bien pour le cas f général.
Ciarlet, introduction à l'analyse numérique matricielle... ← bien pour les systèmes linéaires $Ax=b$
Demailly, analyse numérique et équa diff

NOM : Pellet-Mary Prénom : Alice Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 232

Autre sujet :

II) Méthode de Newton : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Dvpt 1

Théorème 7 : Soit $f : A \to \mathbb{R}^n$ (A fermé de $\mathbb{R}^n$), de classe C^3 et $x \in \mathring{A}$ tel que $f(x) = 0$.
Si Df_x est un isomorphisme, alors il existe un voisinage V de x tel que la suite $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - Df_{x_n}^{-1}(f(x_n)) & (n \geq 0) \\ x_0 \in V \end{cases}$
soit bien définie et converge vers x de manière quadratique.

Remarque 8 : La méthode de Newton consiste à approximer f par sa différentielle (plus facile à manipuler car affine) sur un voisinage de x.
↳ ne sert à rien si f est déjà affine.

Remarque 9 : Le calcul de $Df_{x_n}^{-1}$ à chaque itération peut être coûteux. On peut gagner en rapidité en gardant le même $Df_{x_n}^{-1}$ pendant N itérations.

Remarque 10 : interprétation géométrique en dimension 1 : on remplace la courbe par sa tangente.
voir annexe 2, avec $f = X^2 - 2$, $f'(\sqrt{2}) \neq 0$.

III) Autres méthodes en dimension 1 :

Contrairement à la méthode de Newton qui peut s'utiliser en dimension $n \geq 1$, ici on a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (on a besoin d'un ordre).

1) Méthode de la sécante :

Dans certains cas, f' peut être compliqué à calculer (par exemple si f est donnée sous forme de boîte noire). La méthode de la sécante reprend la méthode de Newton en remplaçant f' par un taux d'accroissement.

Théorème 11 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et x un zéro de f tel que $f'(x) \neq 0$.
Alors il existe un voisinage V de x tel que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} x_0, x_1 \in V, \ x_0 \neq x_1 \\ x_{n+1} = \begin{cases} x_n - f(x_n) \times \dfrac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} & \text{si } f(x_n) \neq 0 \\ x_n & \text{si } f(x_n) = 0 \end{cases} \end{cases}$$
est bien définie et converge géométriquement vers x.
Si de plus $f''(x) \neq 0$, $\exists C > 0$ et $q \in]0,1[$ t.q. $\forall n$ suffisamment grand, $e_n \leq C \times q^{\alpha}$
avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$.

Interprétation géométrique : on remplace dans la méthode de Newton les tangentes par la corde obtenue avec les 2 points précédents (voir annexe 3).

Remarque 12 : si x_n est proche de x_{n-1}, on perd en précision en calculant $x_n - x_{n-1}$ (et $f(x_n) - f(x_{n-1})$). Si x_n et x_{n-1} sont trop proches, il vaut mieux garder le taux d'accroissement obtenu à l'itération précédente.

2) Méthode de la fausse position :

Cette méthode combine les idées de la méthode de la sécante et de celle par dichotomie : on construit x_n avec un taux d'accroissement, mais pas forcément celui des 2 valeurs précédentes :

$$x_n = x_{n^+} - f(x_{n^+}) \times \frac{x_{n^+} - x_{n^-}}{f(x_{n^+}) - f(x_{n^-})}$$

où n^+ et n^- sont comme dans la méthode par dichotomie.

Exemple 13 : Pour $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, cette méthode diffère de la méthode de la sécante pour x_4 (car x_2 et x_3 sont tous les deux < 0).
voir annexe 4.

Comparaison des différentes méthodes : voir annexe

IV) Cas des fonctions affines :

On cherche ici à résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec $x, b \in \mathbb{C}^n$ et $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 14 : La méthode de Newton ne nous apprend rien ici : $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 = x_0 - A^{-1}(Ax - b) = A^{-1}b = x$.

Remarque 15 : Dans la méthode de Newton, pour calculer $Df_{x_n}^{-1}(f(x_n))$ on résout implicitement $Df_{x_n} \times x = f(x_n)$

Remarque 16 : On pourrait résoudre le système avec une méthode directe (ex la méthode de Gauss) mais les erreurs d'arrondis peuvent donner des résultats complètement faux à l'arrivée. On préfèrera donner ici des exemples de méthodes itératives.

Exemple 17 : Pour résoudre $\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$, si les calculs sont arrondis aux 3 premiers chiffres significatifs, la méthode de Gauss donne $(0,1)$ au lieu de $\left(\frac{10^4}{10^4-1} \simeq 1{,}0001, \frac{10^4-2}{10^4-1} \simeq 0{,}9999\right)$

Méthodes itératives

Idée : on se ramène encore à une recherche de point fixe $u = Bu + c$

Lemme 18 : si $B \in M_n(\mathbb{C})$ et $u \in \mathbb{C}^n$, $c \in \mathbb{C}^n$ vérifient $u = Bu + c$, alors la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^n \\ u_{n+1} = Bu_n + c \end{cases}$
converge vers u ssi $\rho(B) = \max(|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } B) < 1$.
Dans ce cas, la convergence est au moins géométrique.

Principe des méthodes : on écrit $A = M - N$ avec M facile à inverser (par exemple triangulaire).
$Ax = b \iff Mx = Nx + b \iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.
Puis on définit x_n par $x_0 \in \mathbb{C}^n$, $x_{n+1} = M^{-1}Nx_n + M^{-1}b$
La méthode converge (vers x) ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel : on suppose $A_{ii} \neq 0 \; \forall i$

On écrit $A = \begin{pmatrix} D & E \\ F & D \end{pmatrix}$ (D diagonale, E et F triangulaires)

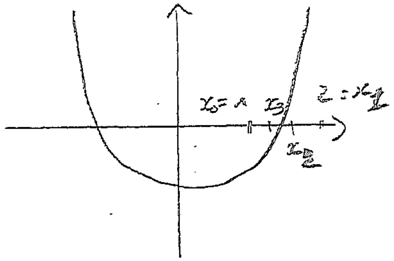
Méthode de Jacobi : $M = D$, $N = -E - F$
Méthode de Gauss-Seidel : $M = D + E$, $N = -F$

Théorème 19 : si A est hermitienne définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge. Dvpt 2

Complexité : Pour obtenir une précision de l'ordre de 2^{-r} (r bits corrects), il faut faire $O(n^2 r)$ opérations sur des réels.

Théorème 20 : si A est tridiagonale ($A_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$), alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément.

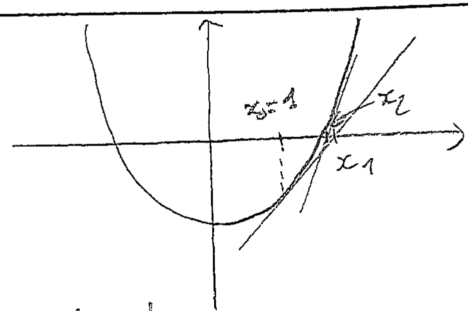
Exemple 21 : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$, A est symétrique définie positive et tridiagonale $\to$ les deux méthodes convergent.
voir annexe 5 pour la méthode de Jacobi sur $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.



x_0	x_1	x_2	x_3
1	2	1,5	1,25

Méthode de dichotomie
$g : x \longmapsto x^2-2 \qquad [a,b]=[1,2]$

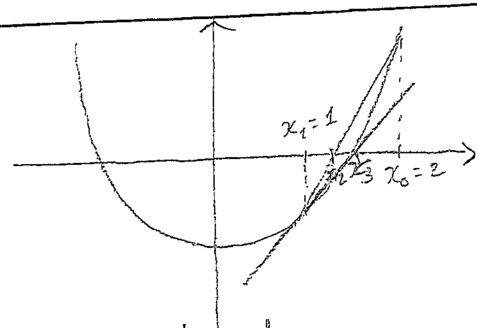
Annexe 1



x_0	x_1	x_2
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12} \simeq 1,4167$

Méthode de Newton
$g : x \longmapsto x^2-2, \qquad x_0=1$

Annexe 2

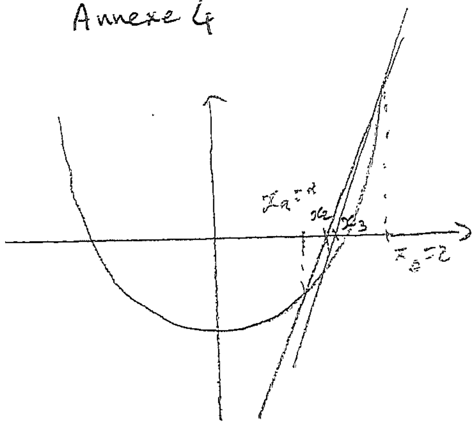


x_0	x_1	x_2	x_3
2	1	4/3	$10/7 \simeq 1,428$

Méthode de la sécante
$g : x \longmapsto x^2-2, \qquad x_0=2, \ x_1=1$

Annexe 3

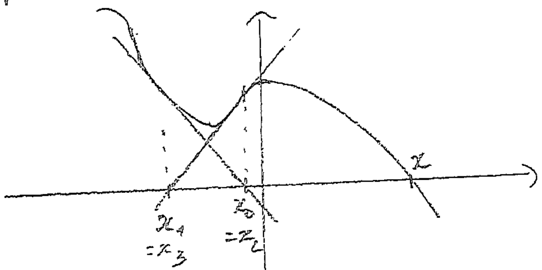
Annexe 4



x_0	x_1	x_2	x_3
2	1	4/3	$7/5=1,4$

Méthode de la fausse position
$g : x \longmapsto x^2-2, \quad x_0=2, \quad x_1=1$

Exemple de non convergence pour la méthode de Newton :



(x_0 est trop loin de x).

Annexe 5

Méthode de Jacobi pour

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M=\begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$

$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On veut résoudre $Ax=b$.
$x_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_{n+1}=M^{-1}(Nx_n+b)$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$

Solution exacte : $\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Développement 1

Preuve des théorèmes 6 et 7 $\rightsquigarrow$ convergence de la méthode de Ne[wton]

Théorème 6 : Si $\varphi : A \to E$ (A fermé de E) est telle que

- $\varphi(A) \subset A$
- φ est K-contractante pour un certain $K \in]0,1[$.
- E espace de Banach.

Alors φ admet un unique point fixe x dans A et $\forall x_0 \in A$, la suite définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers x.

Si de plus $E = \mathbb{R}^n$ et φ est $\mathcal{C}^2$ et $D\varphi_x = 0$, la convergence est (au moins) quad[ratique].

Théorème 7 : Soit $f : A \to \mathbb{R}^n$ (A fermé de $\mathbb{R}^n$) de classe $\mathcal{C}^3$ et $x \in A$ tel que $f(x)$ [$=0$].
Si Df_x est un isomorphisme, alors il existe un voisinage V de x t.q. $\forall x_0 \in V$, la suite définie par $x_{n+1} = x_n - Df_{x_n}^{-1}(f(x_n))$ est bien définie et converge de façon quadratique vers x.

Preuve : Montrons d'abord le théorème 7 à partir du 6.
Soit V un voisinage fermé de x tel que $\forall y \in V$, Df_y soit inversible
(un tel voisinage existe car $\det(Df_x) \neq 0$ et $y \mapsto \det(Df_y)$ est contin[ue]).
Soit
$$\varphi : V \to \mathbb{R}^n$$
$$y \mapsto y - Df_y^{-1}(f(y))$$

On a $\varphi(y) = y \iff Df_y^{-1}(f(y)) = 0 \iff f(y) = 0$ (car Df_y est un isomorphisme)
Donc x est un point fixe de φ.

De plus,
$$D\varphi_x \cdot y = y - Df_x^{-1} \cdot (Df_x \cdot y) - \left(D(Df^{-1})_x \cdot y\right) \cdot \underbrace{f(x)}_{=0}$$
$$= y - y = 0$$

Donc $D\varphi_x = 0$.

Et φ est de classe $\mathcal{C}^2$ car f est de classe $\mathcal{C}^3$.
Soit $|||\ |||$ une norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quitte à réduire V, on peut supposer que $\forall y \in V$, $|||D\varphi_y||| \leq \frac{1}{2}$ (car $y \mapsto D\varphi_y$ est conti[nue] et $D\varphi_x = 0$).
+ on prend V convexe (par ex V est une boul[e])
De plus, si $y_1, y_2 \in V$, et V convexe.
$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \leq \sup_{y \in V} |||D\varphi_y||| \times \|y_2 - y_1\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|y_2 - y_1\| \quad \text{Donc } \varphi \text{ est contractante}$$

r comme V est une boule, $\|\varphi(y)-\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|y-x\|$
$\|\varphi(y)-x\|$

Donc $y \in V \Rightarrow \varphi(y) \in V$.

On applique le théorème 6 à φ et V, cela prouve que (x_n), définie par $x_0 \in V$, $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ converge de façon quadratique vers x qui est l'unique point fixe de φ dans V.

euve du théorème 6 :

finalement pas ça.

unicité du point fixe : si x_1, x_2 sont deux points fixes distincts, $d(x_1,x_2) \neq 0$ mais $\underbrace{d(\varphi(x_1),\varphi(x_2))}_{= d(x_1,x_2)} \leq K\, d(x_1,x_2) < d(x_1,x_2)$ car $d(x_1,x_2)\neq 0$.

contradiction $\Rightarrow$ il y a un unique point fixe.

existence : on montre que la suite (x_n) définie dans l'énoncé converge, et que sa limite est un point fixe de φ.

1. (x_n) est de Cauchy : $d(x_{n+1},x_{n+2}) = d(\varphi(x_n),\varphi(x_{n+1}))$

$$\leq K\, d(x_n,x_{n+1})$$

$$\text{Donc } d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(x_0,x_1)$$

si $m,n \geq N$, $(m \geq n)$ $d(x_m,x_n) \leq d(x_n,x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1},x_m)$

$$\leq K^n\,(1+K+\dots+K^{m-n-1})\,d(x_0,x_1)$$

$$\leq K^N \times \frac{1}{1-K}\, d(x_0,x_1) \qquad (K<1)$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

La suite (x_n) est de Cauchy, à valeur dans A complet, donc elle converge. On note x sa limite.

car fermé dans E complet

2. φ est K-contractante, donc continue, donc

$$\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x$$

Donc $x \in A$ est bien un point fixe de φ.

- Cas où $D\varphi_x = 0$. On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

on peut utiliser juste Taylor-Lagrange.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(x) + D\varphi_x(x_n-x) + D^2\varphi_x(x_n-x, x_n-x) + \varepsilon(\|x_n-x\|)\times\|x_n-x\|^2$$

$$= x + D^2\varphi_x(x_n-x, x_n-x) + \varepsilon(e_n)\times e_n^2 \qquad (e_n = \|x_n - x\|)$$

$$\text{où } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Notons $M = ||| D^2 \varphi_x ||| \geq 0$.

On a alors $e_{n+1} \leq M \times e_n^2 + |\varepsilon(e_n)| \times e_n^2$

On sait déjà que $e_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|\varepsilon(e_n)| \leq M$

On a alors, $\forall n \geq n_0$,

$$e_{n+1} \leq 2M e_n^2$$

La convergence de (x_n) vers x est donc bien quadratique.

Référence : Dumas, modélisation à l'oral de l'agreg.

Développement 2

<u>Preuve du théorème 19</u> : Si A est hermitienne définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.

On commence par énoncer un lemme qui contient le gros de la preuve :

<u>Lemme</u> : Soit $A \in SDP_n$ (matrice hermitienne définie positive), b … $x_0 \in \mathbb{C}$

$A = M - N$ avec M inversible.

Si $M^* + N \in SDP_n$, alors la méthode itérative liée à cette décomposition de A converge

(i.e. (x_n) défini par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{C}^n \\ M x_{n+1} = N x_n + b \end{cases}$ ~~converge vers~~ $\bar{x} \in \mathbb{C}$ et $A\bar{x} = b$

<u>Preuve du théorème à partir du lemme</u> :

Soit $A = \begin{pmatrix} \diagdown D \diagdown & E \\ F & \end{pmatrix}$, la méthode de Gauss-Seidel consiste à prendre

$M = D + F$, $N = -E$.

Si $A \in SDP_n$, alors $\forall i$, $d_{ii} = a_{ii} > 0$ car si on note $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $a_{ii} = e_i^* A e_i > 0$ par définition

Donc M est bien inversible.

Appliquons le lemme : $M^* + N = D^* + F^* - E$

comme $A \in SDP_n$, $A^* = A$ i.e. $F^* = E$

(car $A^* = \begin{pmatrix} \diagdown D^* \diagdown & F^* \\ E^* & \end{pmatrix}$) et $D^* = D$

D'où $M^* + N = D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}$ avec tous les $d_{ii} > 0$

et $M^* + N \in SDP_n$

Donc la méthode de Gauss-Seidel converge, d'après le lem

<u>Preuve du lemme</u> : On va utiliser le théorème de point fixe de Picard (sur $\mathbb{C}^n$):

on définit $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$
$x \longmapsto M^{-1}Nx + M^{-1}b$

si on trouve une norme telle que φ est contractante, alors le théorème de Picard affirme que φ a un unique point fixe $\bar{x}$ et que (x_n) converge vers x. (car $x_{n+1} = \varphi(x_n)$)

Soit $\|\ \|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad \varphi(x) - \varphi(y) = M^{-1}Nx - M^{-1}Ny$$
$$= M^{-1}N(x-y)$$

on note $|||\ |||$ la norme sur $M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à $\|\ \|$.

On a alors $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq |||M^{-1}N||| \times \|x-y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$

Donc si $|||M^{-1}N||| < 1$, φ est contractante et le théorème de Picard permet de conclure.

Il reste à trouver une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $|||M^{-1}N|||$

On prend $\|\ \| : \mathbb{C}^n \longmapsto [0, +\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x^* A x}$ (bien définit car $A \in SDP_n$ et c'est bien une norme).

$M^{-1}N = M^{-1}(M-A) = I_n - M^{-1}A$.

calculons $\sup_{\|x\|=1} \|M^{-1}Nx\| = \sup_{\|x\|=1} \|x - M^{-1}Ax\|$

soit $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$, on pose $w = M^{-1}Ax$, $x = A^{-1}Mw$
(A et M inversible

on a alors $\|x - M^{-1}Ax\|^2 = \|x-w\|^2 = (x^* - w^*)A(x-w)$

$$= x^*Ax - w^*Ax - x^*Aw + w^*Aw$$
$$= \|x\|^2 - w^*Mw - w^*M^*w + w^*Aw$$

on remplace x par $A^{-1}Mw$

$$= 1 - w^*(M + M^* - A)w$$
$$= 1 - w^*(M^* + N)w \qquad (N = M - A)$$

Par hypothèse, $M^* + N \in SDP_n$ donc $w^*(M^*+N)w > 0$ (car $w \neq 0$

et alors $\| x - M^{-1} A x \|^2 < 1$

i.e. $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| = 1$, $\| M^{-1} N x \| < 1$

or $|||M^{-1} N||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \left(\| M^{-1} N x \| \right)$

mais $C = \{x, \|x\| = 1\} \subset \mathbb{C}^n$ est compact

et $x \longmapsto \|M^{-1} N x\|$ est continue, donc

atteint son maximum sur C : il existe

$x_0 \in C$ t.q. $|||M^{-1} N||| = \|M^{-1} N x_0\| < 1$

On a bien $|||M^{-1} N||| < 1$, donc φ est contractante pour la norme $\| \ \|$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x} \in \mathbb{C}^n$ t.q. $A\bar{x} = b$.

Référence : Ciarlet, intro à l'analyse numérique matricielle et optimisation, pages 102-103.

Leçon 232 : Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X)=0$. Exemples.

I Questions

- Que fait-on lorsqu'on veut appliquer une méthode itérative à une matrice non SDP_n ? $Ax = b$, $A \notin SDP_n$

→ A inversible

$A^*Ax = A^*b$

$\in SDP_n$ car $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ → hermitien

$x^*A^*Ax = \langle Ax, Ax\rangle > 0$ si $x \neq 0$ car $Ax \neq 0$ (A inv) ; produit scal hermitien

On résout $A^*Ax = A^*b$
n^2 mult de $\mathbb{R}$

- Que à cause des erreurs d'arrondi qu'on fait des méthodes itératives (plutôt que Gauss par ex) ?

→ Non. Si les matrices sont grosses, peut se révéler + rapide $O(n^2)$ vs $O(n^3)$

Exple : Qu'est ce que c'est que cette matrice ?

→ Discrétisation du Laplacien

$-u'' = f$ $[a,b]$ → $-u''(x_n) \approx \frac{u(x_{n-1}) + u(x_{n+1}) - 2u(x_n)}{h^2}$

h ; x_{n-1}, x_n, x_{n+1}

- D'autres méthodes itératives ?

→ $A = D + E$

$N = (\frac{1}{\omega} D + F)$

- Ordre de la dichotomie et de la fausse position ?

→ 1 ; → > 1, dépend de la régularité de f.

Méthode de Newton si f n'est pas de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

→ Aucune chance que la différentielle soit bij (?)

Allure des zéros d'une fonc° de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si $n \geq m$.

→ * Si f est linéaire et $m < n$: ev de dim $\geq n-m$

* Si f pas linéaire mais "gentille" (e.g. submersion) :

$f(x) = 0$ = variété de dim $n-m$ ↳ diff topo

* Si $n=1$ et $m=2$ ie une courbe. dur d'atteindre le 0 avec Newton

Rq : Différentielle = affine !

→ En fait $h \mapsto f(x) + Df_x(h)$ qui est affine

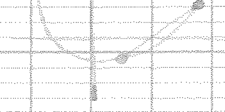
Ça donne quoi comme suite la méthode de Newton appliquée à la recherche de la racine de a ?

→ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_n^2 - a$

Méthode de la sécante. Pourquoi bi de dim 1 ?

→ dichotomie et fausse position : bi de la no° d'ordre, dim 1

sécante :



→ si dim > 1, coupe par un hyperplan + ...

→ + de pt.

Changer de l'échelle !

→ Pour approcher la diff par le tx d'accroissement, faut être malin. Sinon + compliqué et pas stable

Remarque de Kripper

→ $x = x_? \ldots x_1 \times 2^k$ 1 0 0 0 1

$y = x_? \ldots x_1 \times 2^k$ − 1 0 0 0 0

1

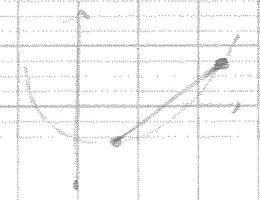
5 bits de précision → 1 bit de précision

On perd bcp en précision en soustrayant des nbres proches

III) Sécantes

1) Mettre la méthode de la sécante sous forme de pt fixe

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \times \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



$x_0, x_1 \quad x_2 = h(x_0, x_1) \quad x_3 = h(x_1, x_2) \quad x_4 = h(x_2, x_3)$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_n \\ x_n - f(x_n) \times \dfrac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} g(x,y) = \left(y,\ y - f(y) \dfrac{y - x}{f(y) - f(x)} \right) & x \neq y \\ g(x,x) = \left(x,\ x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \right) \end{cases}$$

$\bar{x} \quad f(\bar{x}) = 0 \qquad g(x,y) = (g_1(x,y),\ g_2(x,y))$

$(\bar{x}, \bar{x})$ pt fixe

$$g(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} x = y \\ \cancel{y} = \cancel{y} - \dfrac{f(y)}{f'(y)} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ f(y) = 0 \end{cases}$$

$x \neq y,\quad \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = -f(y) \times \dfrac{-(f(y) - f(x)) + (y - x) f'(x)}{(f(y) - f(x))^2}$

$$= f(y) \frac{f(y) - f(x) - (y - x) f'(x)}{(f(y) - f(x))^2}$$

$$f(y) = f(x) + (y - x) f'(x) + \frac{f''(x)}{2}(y - x)^2 + o(|y - x|^2)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = f(y)\left(\frac{f''(x)}{2} \left(\frac{y - x}{f(y) - f(x)}\right)^2 + \underbrace{\frac{o((y - x)^2)}{(f(y) - f(x))^2}}_{\varepsilon(y-x)(y-x)^2} \right)$$

$$\xrightarrow[y \to x]{} f(x)\left(\frac{f''(x)}{2 f'(x)^2} + 0 \right)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) = 0$$

$x \neq y,\quad \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = 1 - f'(y)\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y - x}{f(y) - f(x)} \right) \right] - f'(y)\left(\dfrac{y - x}{f(y) - f(x)} \right)$

$$\xrightarrow[y \to x]{} \cancel{1} - f(x)\left(\frac{f''(x)}{2 f'(x)^2} \right) - \cancel{1}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = 0$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $A^2 = 0$

⇒ pr trouver l'ordre : méthode d'ordre

↳ pas inversible ⇒ pas quadratique (général)
nulle

III) Ce qu'on peut mettre ds le plan

- Résolu° de systèmes linéaires, méthodes itératives (!! mieux que méthodes exactes)
- Méthode de relaxation
- Méthode du gradient conjugué + Jacobi
- Méthode de Newton
- Méthode de la sécante
- Méthode de la fausse position, bien connaître l'ordre de cvgce et l'intérêt par rapport à la sécante
- Intro : d'abord thm d'existence de P et la fonction sur les méthodes, & les polynômes : thm de Gerschgorin (les P + suites de Sturm
  - + Δ^2 d'Aitken (accélérat° !)

IV) Références

- Ciarlet
- Quarteroni ← gradient conjugué
- Demailly
- Schatzman
- Stoer-Bulirsch ← suites de Sturm
  ← Δ^2 d'Aitken