Propriétés spectrales des opérateurs compacts

1 Résultats du plan : lemme et théorème de Riesz

Proposition 1. [Bré, page 91] (lemme de Riesz) Soit E un espace vectoriel normé, et soit $M \subset E$ un sous-espace fermé strict. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists u \in E, \quad \|u\| = 1, \quad d(u, M) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Théorème 2. [Bré, page 92] (Riesz) Soit E un espace vectoriel normé. Si sa boule unité fermée B_E est compacte, alors E est de dimension finie.

2 Propriétés générales

Proposition 3. [Bré, page 92] Soit E un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact.

1. $N := \ker(\mathrm{Id} - T)$ est de dimension finie.
2. $R := \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ est fermée.
3. ADMIS Si $\mathrm{Id} - T$ est injectif, alors il est surjectif.

Preuve.

1. La boule unité fermée de N est

$$B_N = \{x \in B_E, Tx = x\} \subset T(B_E) \subset \overline{T(B_E)},$$

et $\overline{T(B_E)}$ est compact, donc B_N est compacte. On conclut grâce au théorème de Riesz 2 que N est de dimension finie.

2. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n - Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément $y \in E$. Montrons que $y \in R$. Comme N est de dimension finie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in N$ tel que

$$\|x_n - v_n\| = d(x_n, N).$$

Quitte à remplacer x_n par $x_n - v_n$, qui est toujours un anécédent de y_n par $\mathrm{Id} - T$, on peut supposer que $v_n = 0$ pour simplifier les notations.

Supposons par l'absurde que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée : quitte à extraire, on a $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc en notant $\tilde{x}_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$, bien défini pour n assez grand, on a

$$\tilde{x}_n - T\tilde{x}_n = \frac{y_n}{\|x_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Or, $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc par compacité de T, quitte à extraire, il existe $z \in E$ tel que $T\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$. Alors, $\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$, puis $z \in N$, d'où

$$d(w_n, N) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(z, N) = 0.$$

Or, on a, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $d(\tilde{x}_n, N) = 1$, d'où une contradiction. En définitive, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc par compacité de T, quitte à extraire, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in E$. Alors,

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y + \ell \in E,$$

et on a $y = (y + \ell) - T(y + \ell) \in R$, ce qui démontre que R est fermé dans E.

3. cf. [Bré].

□

3 Propriétés spectrales

Lemme 4. [Bré, page 95] Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$ convergeant vers un $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda = 0$. Autrement dit, les points de $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$ sont isolés.

Preuve. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit e_n un vecteur propre associé à λ_n, et soit $E_n = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$. On démontre par récurrence que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, les vecteurs $e_1, \dots e_n$ sont linéairement indépendants ; alors, $E_n \subsetneq E_{n+1}$ et les E_n sont fermés les uns dans les autres car de dimension finie. Le lemme de Riesz 1 fournit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in E_n, \|u_n\| = 1, d(u_n, E_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Si $n > m \geqslant 2$, on a $E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$, et $(T - \lambda_n \mathrm{Id})(E_n) \subset E_{n-1}$, donc

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m}\right\| &= \|\underbrace{\underbrace{\frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m}}_{\in E_{m-1}} - \underbrace{\frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n}}_{\in E_{n-1}} + u_m}_{\in E_{n-1}} - u_n\| \\ &\geqslant d(u_n, E_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Cela montre que $\left(\frac{Tu_n}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence. Puisque $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence par compacité de T, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers une valeur non nulle. □

Théorème 5. [Bré, page 95] Soit E un espace de Banach de dimension infinie, et soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact de spectre $\sigma(T)$. Alors,

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$.
3. Soit $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$ est fini, soit c'est une suite qui converge vers 0.

Preuve.

1. Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors, T est inversible, et l'opérateur $\mathrm{Id}_E = T \circ T^{-1}$ est compact ; ainsi, la boule unité B_E est compacte, donc d'après le théorème de Riesz, E est de dimension finie. On conclut en contraposant.
2. Soit λ une valeur spectrale non nulle de T. Alors, $T - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas inversible, donc pas injectif d'après 3. On a donc $\lambda \in \mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\}$.
3. Pour chaque $n \geqslant 1$, l'ensemble
$$\left\{\lambda \in \sigma(T), \quad |\lambda| \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$
est compact car $\sigma(T)$ l'est, et sans point d'accumulation d'après 4, donc vide ou fini. Cela prouve que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est dénombrable, donc peut être rangé sous forme de suite. Cette suite bornée admet une valeur d'adhérence par la propriété de Bolzano-Weierstraß, et l'unique possibilité est 0 par 4, donc la suite converge vers 0.

□

Remarques

- Convient pour les leçons 203, 206, 208.
- Si on présente ce développement, il est indispensable de pouvoir répondre à des questions sur les opérateurs compacts. En particulier, il faut connaître des exemples de tels opérateurs, comme les opérateurs de type Hilbert-Schmidt.
- Pour faire tenir le développement en 15 minutes, il faut avoir les idées bien claires.
- Il est intéressant de connaître la diagonalisation des opérateurs autoadjoints compacts : cf [Bré].

Références

[Bré] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 2005.