Constructibilité des polygones réguliers

1 Résultats du plan

Définition 1. **[Car]** On se donne deux points de base $O(0,0)$ et $I(1,0)$. Un nombre $t \in \mathbb{R}$ est dit *constructible* s'il existe des points $M_0 = O, M_1 = I, \dots M_n = M(t,0)$, où $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, M_{i+1} est l'intersection de deux objets parmi

— Une droite (AB), avec $A, B \in \{M_0, \dots, M_i\}$

— Un cercle de centre C et de rayon AB avec $A, B, C \in \{M_0, \dots, M_i\}$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des nombres réels constructibles.

Théorème 2. **[Car]** L'ensemble $\mathscr{C}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par passage à la racine carrée.

Théorème 3. **[Car]** **(théorème de Wantzel)** Un réel t est constructible si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et une suite de sous-corps

$$\mathbb{Q} = Ł_1 \subset \cdots \subset Ł_p \subset \mathbb{R}$$

telle que $t \in Ł_p$ et pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, $[Ł_i : Ł_{i+1}] = 2$.

Remarque 4. La preuve de ce résultat est tout à fait accessible : cf [Car]. Il est bon d'avoir une idée de la démonstration.

2 Le résultat de Wantzel

Corollaire 5. **[Car]** Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré est une puissance de 2.

Preuve. Soit $t \in \mathscr{C}$. D'après le théorème de Wantzel 3, il existe une suite de sous-corps

$$\mathbb{Q} = Ł_1 \subset \cdots \subset Ł_p \subset \mathbb{R}$$

telle que $t \in Ł_p$ et pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, $[Ł_i : Ł_{i+1}] = 2$. Par multiplicativité des degrés, on a $[Ł_p : \mathbb{Q}] = [Ł_p : Ł_{p-1}] \dots [Ł_2 : Ł_1] = 2^{p-1}$. Par ailleurs,

$$[Ł_p : \mathbb{Q}] = [Ł_p : \mathbb{Q}(t)][\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}],$$

ce qui montre que $[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}]$ divise 2^{p-1}. $[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}]$ est donc fini, et c'est une puissance de 2, ce qui prouve le résultat. □

3 Angles constructibles

Définition 6. **[Car]** On dit qu'un angle $\widehat{\theta}$ est constructible, et on note $\theta \in \mathscr{C}$, si $\cos\theta \in \mathscr{C}$.

Proposition 7. **[Car]** Si $m, n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux,

$$\widehat{\frac{2\pi}{mn}} \in \mathscr{C} \iff \widehat{\frac{2\pi}{m}}, \widehat{\frac{2\pi}{n}} \in \mathscr{C}.$$

Preuve.

— Dans le sens direct, on écrit $\widehat{\frac{2\pi}{m}} = n\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$, $\widehat{\frac{2\pi}{n}} = m\widehat{\frac{2\pi}{mn}}$, et si un angle est constructible, il est clair que ses multiples le sont.

— Réciproquement, si $\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ et $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ sont constructibles, le théorème de Bézout fournit $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ tels que $\lambda m + \mu n = 1$. Alors, l'angle $\widehat{\frac{2\pi}{mn}} = \lambda\widehat{\frac{2\pi}{n}} + \mu\lambda\widehat{\frac{2\pi}{m}}$ est constructible.

□

Corollaire 8. **[Car]** Pour tout $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \geqslant 3$, le polygone régulier à n côtés P_n est constructible si et seulement si les angles $\widehat{\frac{2\pi}{p_i^{\alpha_i}}}$ le sont.

PROPOSITION 9. [CAR] Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\widehat{\frac{2\pi}{2^\alpha}} \in \mathscr{C}$.

Preuve. Il suffit de construire des bissectrices α fois de suite. □

PROPOSITION 10. [CAR] Soit $p \geqslant 3$ premier impair. $\widehat{\frac{2\pi}{p^\alpha}} \in \mathscr{C}$ si et seulement si $\alpha = 1$ et $\exists \beta \in \mathbb{N}$, $p = 1 + 2^{2^\beta}$. Sens réciproque admis.

REMARQUE 11. Il est bon d'avoir une idée de la preuve (un peu délicate) du sens réciproque. On pourra pour cela consulter [Car].

Preuve du sens direct. Soit $q = p^\alpha$. Supposons $\widehat{\frac{2\pi}{q}}$ constructible. D'après le corollaire 5 théorème de Wantzel, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\right) : \mathbb{Q}\right] = 2^m.$$

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{q}}$; ω est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et son polynôme minimal est

$$\Phi_q = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n,\ k \wedge n = 1} (X - \omega^k),$$

de degré $\varphi(q) = p^{\alpha-1}(p-1)$. Ainsi,

$$[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Comme $\omega + \omega^{-1} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$, on a $\omega^2 - 2\omega\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) + 1 = 0$; ainsi, ω est algébrique de degré 2 sur $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\right)$. Par multiplicativité des degrés,

$$\begin{aligned} p^{\alpha-1}(p-1) = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] &= \left[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\right)\right] \cdot \left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\right) : \mathbb{Q}\right] \\ &= 2 \cdot 2^m. \end{aligned}$$

Finalement, $p^{\alpha-1}(p-1) = 2^{m+1}$. Puisque p est premier impair, cela impose $\alpha = 1$ et $p = 1 + 2^{m+1}$.

Il reste à montrer que $m+1$ est une puissance de 2. On peut écrire $m + 1 = 2^\beta \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$ impair. Alors, le polynôme $X + 1$ divise $X^\lambda + 1$, car

$$X^\lambda + 1 = (X+1)(X^{\lambda-1} - X^{\lambda-2} \cdots - X + 1).$$

On en déduit que $p = 1 + 2^{m+1} = 1 + (2^{2^\beta})^\lambda$ est divisible par $1 + 2^{2^\beta}$. Comme p est premier, cela impose $p = 1 + 2^{2^\beta}$. □

EXEMPLE 12. [CAR] Le pentagone régulier est constructible.

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On a

$$1 + \omega + \cdots + \omega^4 = 0. \tag{1}$$

De plus $\omega + \omega^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\omega^2 + \omega^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Par (1), on obtient alors

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}. \tag{2}$$

et

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}. \tag{2}$$

Ces deux cosinus sont donc les racines du polynôme $X^2 + X/2 - 1/4$. Puisque $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0 < \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on a finalement

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right).$$

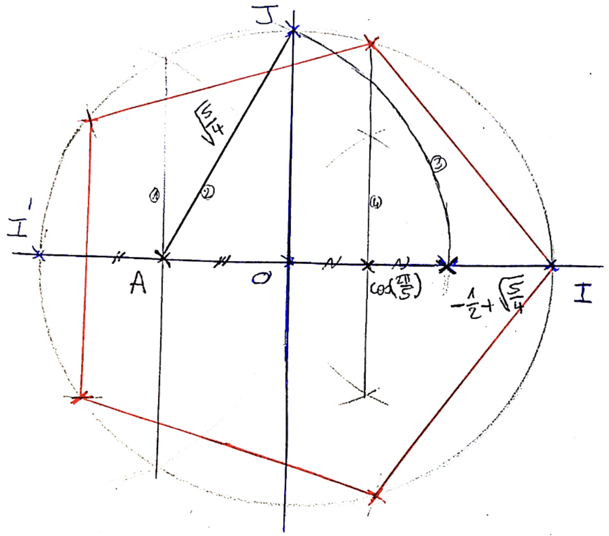
Remarques

- Convient pour les leçons 102, 125, 144, 191.
- La réciproque du corollaire 5 est fausse : le polynôme $X^4 - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et possède une racine réelle (de degré $4 = 2^2$ sur $\mathbb{Q}$) non constructible.
- Pourquoi le polynôme minimal de $\omega = e^{\frac{2i\pi}{q}}$ est Φ_q ? Réponse : ce polynôme est annulateur et irréductible sur $\mathbb{Q}$. Doit apparaître dans le plan si la leçon s'y prête.

Références

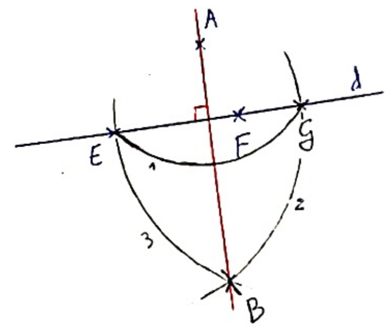
[Car] Jean-Claude CARREGA, *Théorie des corps*, Hermann, 1989.

Construction du pentagone régulier

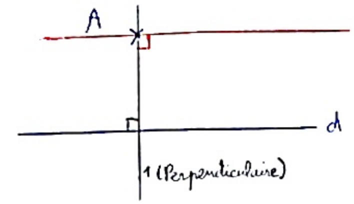


Nombres réels constructibles

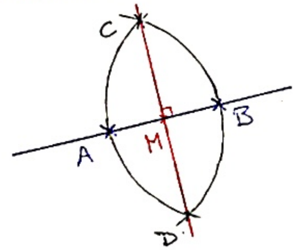
- Perpendiculaire



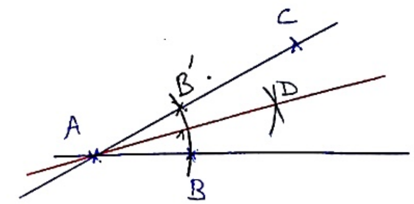
- Parallèle



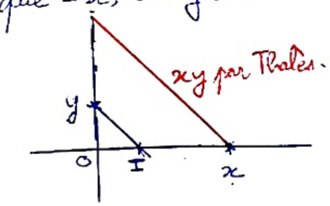
- Milieu et médiatrice



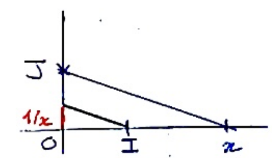
- Bissectrice



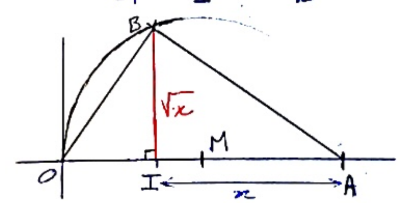
- $0, 1 \in \mathcal{E}$.
- Si $x, y \in \mathcal{E}$, il est clair que $-x$, $x+y \in \mathcal{E}$.
- Construction de xy :



- Construction de $\frac{1}{x}$:



- Construction de $\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$



OM=MA
$IB^2 = OI \cdot IA$