Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Théorème 1. Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il existe une unique $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ telle que

1. $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
2. $u(0, \cdot) = g$.
3. $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ localement uniformément en t : autrement dit,

$$\forall T > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists M_p^T > 0, \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \underbrace{\sup_{\alpha, \beta \leqslant p} \|x^\alpha \partial_x^\beta u(t, \cdot)\|_\infty}_{= N_p(u(t,\cdot))} \leqslant M_p^T.$$

1 Analyse

Soit u une telle solution. Définissons, pour tous $t \geqslant 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_u(t, \xi) = \mathcal{F}(u(t, \cdot))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ix\cdot\xi} \, \mathrm{d}x.$$

Fixons $\xi \in \mathbb{R}$. Alors, $\mathcal{F}_u(\cdot, \xi)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car

- pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $u(\cdot, x)e^{-ix\xi} \in C^0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*)$,
- (Domination C^1) Pour tout $T > 0$, si $t \in]0, T]$, on a

$$\begin{aligned}(1 + x^2)|\partial_t u(t, x) e^{-ix\xi}| &= (1 + x^2)|\partial_x^2 u(t, x)| \\ &\leqslant 2N_2(u(t, \cdot)) \\ &\leqslant 2M_2^T.\end{aligned}$$

- (Domination C^0) Pour tout $T > 0$, si $t \in [0, T]$, on a

$$(1 + x^2)|u(t, x)e^{-ix\xi}| \leqslant M_0^T + M_2^T.$$

On peut donc écrire, pour tous $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{F}_u(t, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t, x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u(t, x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \\ &\underset{2\ IPP}{=} -\xi^2 \mathcal{F}_u(t, \xi).\end{aligned}$$

Pour ξ fixé, on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre : il existe $C(\xi) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t > 0, \mathcal{F}_u(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} C(\xi).$$

Par continuité en 0, on a $C(\xi) = \widehat{g}(\xi)$. Ainsi,

$$\forall t \geqslant 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}_u(t, \xi) = e^{-t\xi^2} \widehat{g}(\xi).$$

Par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\cdot^2} \widehat{g})(x),$$

d'où l'unicité.

2 Synthèse

Si u est définie comme ci-dessus, on a bien sûr $u(0, \cdot) = g$. De plus, par inversion de Fourier, on a pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi.$$

On en déduit par théorème de dérivation sous l'intégrale que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, et que $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Montrons enfin que $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ localement uniformément en t. Fixons $T > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Pour tous $t \in [0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x^\alpha \partial_x^\beta u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} \widehat{g}(\xi)(i\xi)^\beta e^{i\xi x} x^\alpha \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{(-i)^\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} \widehat{g}(\xi)(i\xi)^\beta e^{i\xi x} (ix)^\alpha \, \mathrm{d}\xi \\ &\underset{\alpha\ IPP}{=} \frac{i^\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^\alpha (e^{-t\xi^2} (i\xi)^\beta \widehat{g}) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi \\ &\underset{Leibniz}{=} \frac{i^\alpha}{2\pi} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} f_{k,\beta}(\xi) P_{k,\alpha}(t, \xi) e^{-t\xi^2} e^{ix\xi} \, \mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

où les $f_{k,\beta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et où les $P_{k,\alpha}$ sont des polynômes en deux variables. Ainsi,

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta u(t,\cdot)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|f_{k,\beta}(\xi)|}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R})} \underbrace{|P_{k,\alpha}|(T, |\xi|)}_{\text{à croissance modérée}} \,\mathrm{d}\xi =: M_{\alpha,\beta}^T < +\infty,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarques

— Convient pour les leçons 235, 236, 239, 250.

— La preuve marche de la même façon en dimension d, avec des notations plus lourdes.

— L'hypothèse $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ n'est pas dans [Ber], ni l'hypothèse $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ uniformément en t, mais cela permet de rendre son analyse avec la transformée de Fourier partielle rigoureuse.

— En réalité, pour l'équation de la chaleur, on n'a pas besoin que l'analyse soit rigoureuse : elle suffit à fournir l'existence de la solution pour g continue bornée (alors, $u \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ par changement de variable et convergence dominée, mais seulement $C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$: cf. [Ber]), et l'unicité est assurée par le principe du maximum (cf. [**?**])... mais la preuve présentée ici a l'avantage de s'appliquer à d'autres équations, comme Schrödinger, où on n'a pas de principe du maximum.

— Dans ce cas, pourquoi ne pas avoir fait tout simplement l'équation de Schrödinger ? ... parce que c'est plus difficile d'obtenir une expression explicite de $\mathcal{F}^{-1}(e^{-it\xi^2})$ (ici, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$), donc la décroissance à l'infini est moins évidente (cf. [Zui] pour les détails).

— On pourrait faire la même preuve en supposant seulement $g \in L^1(\mathbb{R})$, et en remplaçant $u(0,\cdot) = g$ par $\|u(t,\cdot) - g\|_1 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. Le point délicat est alors de démontrer que $(k_t)_{t>0}$ est une approximation de l'unité en 0... On remarque alors bien l'effet régularisant de la chaleur ($u \in C^\infty$ dès que $t > 0$, alors que la donnée initiale est seulement L^1).

— La preuve s'adapte avec une donnée $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ (cf. [Zui] pour Schrödinger), mais il y a alors de nombreux points délicats à justifier (on utilise notamment le théorème de Banach-Steinhaus).

Expression explicite et décroissance à l'infini

Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} \widehat{g}(\xi) e^{i\xi x} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-iy\cdot\xi} \,\mathrm{d}y \right) e^{i\xi x} \,\mathrm{d}\xi \\
&\underset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\xi^2} e^{i\xi\cdot(x-y)} \,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}y \\
&= g * k_t(x)
\end{aligned}$$

avec

$$k_t(y) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\cdot^2})(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-y^2/4t}.$$

Comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\forall t > 0, \|u(t,\cdot)\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|g\|_1.$$

En dimension d, on aurait une décroissance en $t^{-d/2}$.

Références

[Ber] Florent Berthelin, *Équations différentielles*, Cassini, 2017.

[Rau] Jeffrey Rauch, *Partial differential equations*, Springer, 1991.

[Zui] Claude Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod, 2002.