Coniques et théorème de Pascal

1 Cinq points définissent une conique

Théorème 1. [Eid, page 52] Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Par 5 points distincts $A, B, C, D, E \in \mathcal{E}$ dont 4 quelconques ne sont pas alignés passe une unique conique $\mathscr{C}$, non dégénérée si et seulement si 3 quelconques des 5 points ne sont pas alignés.

Preuve. Il existe trois points formant un repère affine de $\mathcal{E}$, par exemple (A, B, C). Notons (x_D, y_D, z_D) et (x_E, y_E, z_E) les coordonnées barycentriques respectives de D et E dans ce repère affine.

Dans le repère (A, B, C), l'équation d'une conique $\mathscr{C}$ passant par A, B, C est de la forme

$$(\mathscr{C}) : pyz + qxz + rxy = 0.$$

Les points D et E appartiennent à $\mathscr{C}$ si et seulement si p, q, r sont solutions du système linéaire

$$\begin{cases} py_Dz_D + qx_Dz_D + rx_Dy_D &= 0, \\ py_Ez_E + qx_Ez_E + rx_Ey_E &= 0. \end{cases}$$

Ce système est de rang au plus 2 ; montrons que son rang est exactement 2, ce qui prouvera l'existence et l'unicité de $\mathscr{C}$ (l'espace des solutions sera de dimension 1, donc p, q, r uniques à multiplication près par un même scalaire non nul).

Considérons pour cela les trois mineurs de taille 2 du système,

$$m_z = \begin{vmatrix} y_Dz_D & y_Ez_E \\ x_Dz_D & x_Ez_E \end{vmatrix}, m_x = \begin{vmatrix} x_Dz_D & x_Ez_E \\ x_Dy_D & x_Ey_E \end{vmatrix} \text{ et } m_y = \begin{vmatrix} y_Dz_D & y_Ez_E \\ x_Dy_D & x_Ey_E \end{vmatrix},$$

respectivement égaux à

$$m_z = z_Dz_E \begin{vmatrix} y_D & y_E \\ x_D & x_E \end{vmatrix}, m_x = x_Dx_E \begin{vmatrix} z_D & z_E \\ y_D & y_E \end{vmatrix} \text{ et } m_y = y_Dy_E \begin{vmatrix} z_D & z_E \\ x_D & x_E \end{vmatrix}.$$

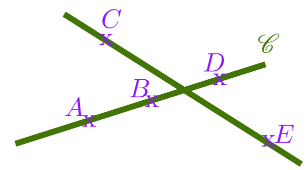
On cherche à montrer que ces mineurs sont non tous nuls. Si $m_x \neq 0$, c'est gagné : supposons donc $m_x = 0$. Alors, trois cas se présentent :

1. Si
$$\begin{vmatrix} y_D & y_E \\ z_D & z_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_D & x_E & 1 \\ y_D & y_E & 0 \\ z_D & z_E & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
alors A, D, E sont alignés. Puisque quatre quelconques des 5 points ne sont pas alignés, on montre alors que $m_z \neq 0$.
2. Si $x_D = 0$, alors $D \in (BC)$, donc $x_E \neq 0$ car $E \notin (BC)$. De plus, $y_D \neq 0$ car $D \neq C$, et $z_D \neq 0$ car $D \neq B$, donc $y_Dz_D \neq 0$. Enfin, comme $A \neq E$, l'une des deux coordonnées y_E ou z_E est non nulle, donc m_y ou m_z est non nul.
3. Le cas où $x_E = 0$ est le symétrique du cas précédent.

Ceci démontre la première partie du théorème. Pour la seconde (admise à l'oral), il reste à remarquer que

— si $\mathscr{C}$ est une conique dégénérée (*i.e.* une droite ou une réunion de deux droites) passant par A, B, C, D, E, alors trois des cinq points sont nécessairement alignés (ce qui est clair).

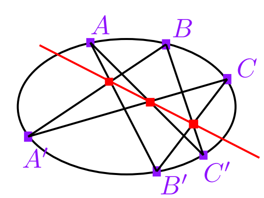
— Réciproquement, si trois points sont alignés, par exemple A, B, D, alors la conique passant par les 5 points est $(AB) \cup (CE)$, qui est dégénérée.



□

2 Théorème de Pascal

Théorème 2. [Eid, page 90] (théorème de Pascal) Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soient $A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{E}$ distincts avec A, B, C non alignés. Alors, il existe une conique passant par ces six points si et seulement si les points $P := (BC') \cap (CB')$, $Q := (CA') \cap (AC')$ et $R := (AB') \cap (BA')$, que l'on suppose bien définis, sont alignés.



Preuve. Notons (x_A, y_A, z_A) les coordonnées barycentriques de A' dans le repère affine (A, B, C), idem pour B', C'.

On a

$$(X, Y, Z) \in (BC') \iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_C & y_C & z_C \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \iff z_C X = x_C Z,$$

et

$$(X, Y, Z) \in (B'C) \iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_B & y_B & z_B \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \iff x_B Y = y_B X.$$

Les coordonnées barycentriques de P sont donc $(x_B x_C, y_B x_C, x_B z_C)$. On calcule de même celles de Q et de R. Les points P, Q, R sont alignés si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées barycentriques est nul, c'est-à-dire

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_B x_C & y_B x_C & x_B z_C \\ y_C x_A & y_C y_A & z_C y_A \\ x_A z_B & z_A y_B & z_A z_B \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, il existe une conique passant par A, B, C, A', B', C' si et seulement s'il existe u, v, w non tous nuls tels que l'équation

$$uYZ + vXZ + wXY = 0$$

soit vérifiée par A', B', C', ce qui équivaut à la nullité du déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_A z_A & x_A z_A & x_A y_A \\ y_B z_B & x_B z_B & x_B y_B \\ y_C z_C & x_C z_C & x_C y_C \end{vmatrix}.$$

En réalité, les déterminants Δ_1 et Δ_2 sont égaux ! En effet, si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{3} a_{i,\sigma(i)}.$$

— Pour $\sigma = \mathrm{Id}$, on prend le produit des termes diagonaux affecté d'un signe $+$: on obtient le même résultat dans les deux matrices.

— Dans le calcul de Δ_1, le terme correspondant à $\sigma = (1\ 2)$ est égal au produit des 3 coefficients ci-dessous dans la première matrice :

$$\begin{bmatrix} x_B x_C & \boxed{y_B x_C} & x_B z_C \\ \boxed{y_C x_A} & y_C y_A & z_C y_A \\ x_A z_B & z_A y_B & \boxed{z_A z_B} \end{bmatrix},$$

affecté d'un signe $-$ car $\varepsilon(\sigma) = -1$. Cette quantité est égale, dans la seconde matrice, au produit des termes encadrés suivants :

$$\begin{bmatrix} y_A z_A & \boxed{x_A z_A} & x_A y_A \\ \boxed{y_B z_B} & x_B z_B & x_B y_B \\ y_C z_C & x_C z_C & \boxed{x_C y_C} \end{bmatrix},$$

affecté d'un signe $-$, ce qui correspond au calcul du terme $\sigma = (1\ 2)$ dans la formule définissant Δ_2.

— On raisonne de même pour les autres transpositions et pour les 3-cycles (les rôles des deux 3-cycles étant inversés dans chacun des déterminants).

Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarques

— Convient pour les leçons 152, 162, 171, 181, 191.

— Le premier théorème a une place dans la leçon 151 car on utilise la caractérisation du rang par les mineurs.

— Dans la première partie, l'unicité découle aussi du théorème de Bézout (pas trivial) : deux courbes de degré 2 s'intersectent en au plus $2 \times 2 = 4$ points, donc pas 5 points.

— Pour le premier théorème, ne pas démontrer la seconde partie (pas le temps). Et même sans cela, le développement est long !

— Dans le théorème de Pascal, il faut trouver un moyen mnémotechnique pour ne pas avoir à calculer les coordonnées de Q et R à l'oral.

— Si par exemple $B' = C$, les autres points étant distincts, le théorème de Pascal reste vrai en remplaçant $(B'C)$ par la tangente à la conique en C. Cela donne d'ailleurs une méthode pour tracer la tangente à une conique en un point (exercice !).

— En fait, le théorème de Pascal est un théorème de nature projective : sa démonstration avec des outils affines n'est donc pas la plus naturelle. C'est pour cette raison que l'égalité des déterminants Δ_1 et Δ_2 paraît magique, même si au fond, elle ne l'est pas tant que ça.

— Que se passe-t-il si on essaie de déterminer les coordonnées de P lorsque (BC') et $(B'C)$ sont parallèles ? Réponse : On a un problème, car les éventuelles coordonnées barycentriques de P sont de somme nulle...

— Que se passe-t-il si $x_B = 0$, par exemple ? Réponse : Alors, B, C, B' sont alignés, et la conique est dégénérée.

Références

[Eid] Jean-Denis Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage & Mounet, 2009.