Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle

1 Contexte

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de pôles et sans pôles réels. On suppose que

$$f(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$$

et que $f_{|\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$. Par exemple, on peut choisir pour f une fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ avec $\deg Q \geqslant \deg P + 2$, et Q sans racines réelles. On cherche à calculer l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)e^{ixt}}_{=f_x(t)} \,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

2 Théorème des résidus

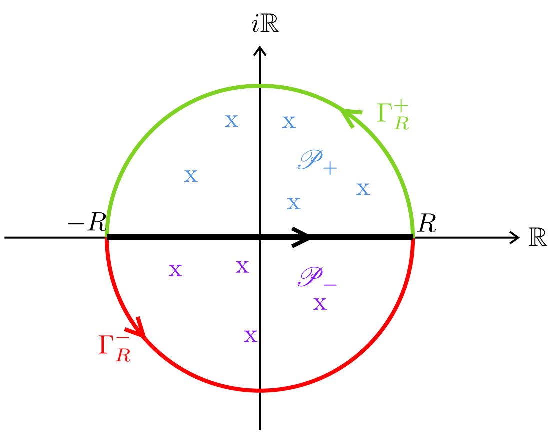
Fixons $x \in \mathbb{R}^*$. Notons $\mathscr{P}$ les pôles de f_x : on a $\mathscr{P} = \mathscr{P}_+ \sqcup \mathscr{P}_-$, avec $\mathscr{P}_+$ (resp. $\mathscr{P}_-$) l'ensemble des pôles de partie imaginaire > 0 (resp. < 0).

Soit $R > 0$ assez grand pour que $D(0,R)$ contienne $\mathscr{P}$. Définissons les deux demi-cercles

$$\Gamma_R^+ : t \in [0,\pi] \mapsto Re^{it}$$

et

$$\Gamma_R^- : t \in [\pi, 2\pi] \mapsto Re^{it}.$$



D'après le théorème des résidus en notant γ_R^+ le lacet obtenu par concaténation de Γ_R^+ et du segment $[-R,R]$, idem pour γ_R^- (le segment étant cette fois parcouru de R à $-R$), on a

$$\int_{-R}^{R} f_x(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\Gamma_R^+} f_x(t)\,\mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{a\in\mathscr{P}_+} \mathrm{Res}(f_x,a)\underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_R^+}(a)}_{=1}$$

et

$$-\int_{-R}^{R} f_x(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\Gamma_R^-} f_x(t)\,\mathrm{d}t = 2i\pi \sum_{a\in\mathscr{P}_-} \mathrm{Res}(f_x,a)\underbrace{\mathrm{Ind}_{\gamma_R^-}(a)}_{=1}.$$

La première égalité sera utile dans le cas où $x > 0$, et la seconde dans le cas où $x < 0$.

Regardons le cas où $x > 0$, l'autre cas étant similaire. D'une part, par convergence dominée,

$$\int_{-R}^{R} f_x(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[R\to\infty]{} \varphi(x).$$

D'autre part, pour $R > 0$ assez grand, en notant $M_f(R) = \sup\limits_{|z|=R} |f(z)|$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_R^+} f_x(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})e^{ixRe^{it}} iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant RM_f(R)\int_0^{\pi} e^{-xR\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2RM_f(R)\int_0^{\pi/2} e^{-xR\sin t}\,\mathrm{d}t \\
&\text{(symétrie de sin sur } [0,\pi]) \\
&\underset{(*)}{\leqslant} 2RM_f(R)\int_0^{\pi/2} e^{-xR\frac{2}{\pi}t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2RM_f(R)\frac{\pi}{2xR}\left(1-e^{-xR}\right) \\
&\leqslant \frac{\pi M_f(R)}{x},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé, en $(*)$, l'inégalité $\sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi}t$ pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dessin : concavité.

Ainsi, puisque $f(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$, on a $M_f(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, donc $\left|\int_{\Gamma_R^+} f_x(t)\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

En définitive, on obtient

Théorème 1. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de pôles et sans pôles réels. On suppose que

$$f(z) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$$

et que $f_{|\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si l'on note $f_x : t \mapsto f(t)e^{ixt}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2i\pi \displaystyle\sum_{\substack{a\in\mathscr{P}\\ \Im(a)>0}} \mathrm{Res}(f_x, a) & \text{si } x > 0, \\ -2i\pi \displaystyle\sum_{\substack{a\in\mathscr{P}\\ \Im(a)<0}} \mathrm{Res}(f_x, a) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Remarque 2. Si on a de plus $f(z) \underset{|z|\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{|z|}\right)$ (c'est le cas par exemple si $f = \frac{P}{Q}$ avec $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et Q sans pôle réel), alors le calcul précédent est également valable pour $x = 0$.

3 Exemple

Calculons la transformée de Fourier de $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Puisque f est paire, sa transformée de Fourier l'est aussi, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \varphi(x).$$

La fonction f vérifie les hypothèses précédentes, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_x(t) = f(t)e^{ixt} = \frac{e^{ixt}}{(t-i)(t+i)} = \frac{e^{ixt}}{2i}\left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right).$$

Ainsi, $\mathrm{Res}(f_x, i) = \lim_{t\to i}(t-i)f(t)e^{ixt} = \frac{e^{-x}}{2i}$ et $\mathrm{Res}(f_x, -i) = \lim_{t\to -i}(t+i)f(t)e^{ixt} = -\frac{e^{x}}{2i}$. On a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2i\pi\mathrm{Res}(f_x, i) & \text{si } x > 0 \\ -2i\pi\mathrm{Res}(f_x, -i) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \pi e^{-|x|}.$$

Par continuité de φ en 0 (ou par calcul direct), cette formule est encore vraie pour $x = 0$.

Quelques remarques :

— On doit avoir $\varphi(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, ce qui est bien le cas pour la formule obtenue.

— Une fois que l'on a l'expression de φ, on peut vérifier que l'on ne s'est pas trompé avec la formule d'inversion de de Fourier. En effet, on doit avoir

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi\check{f} \underset{f \text{ est paire}}{=} 2\pi f.$$

Il suffit donc de calculer $\frac{1}{2\pi}\hat{\varphi}$ et de vérifier qu'on obtient f : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t &= \pi\int_0^{\infty} e^{-(1+ix)t}\,\mathrm{d}t + \pi\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ix)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{1+ix} + \frac{\pi}{1-ix} = \frac{2\pi}{1+x^2} \\ &= 2\pi f(x).\end{aligned}$$

Remarques

— Convient pour les leçons 236, 239, 245, 250 et 267.

— Si le temps manque, ne pas faire le calcul d'inversion de Fourier.

Références

[AM] Éric Amar, Étienne Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.