Leçon 209 : Approximations d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I Approximation par des polynômes

I.1 Approximation locale

Théorème 1. *[Gou, p.75] **(Formule de Taylor-Young)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur un intervalle I. Soit $a \in I$ tel que $F^{(n+1)}(a)$ existe. Alors, lorsque $h \to 0$, on a:*

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Exemple 2. [Gou, p.89] La formule de Taylor-Young permet d'obtenir facilement des développements limités lorsque $x \to 0$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Théorème 3. *[Gou, p75] **(Formule de Taylor avec reste intégral)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$:*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

I.2 Approximations sur un compact

Définition-proposition 4. [Que, p.97] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On définit ω_f **module de continuité** de f, où, pour tout $\delta \geqslant 0$:

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)|;\ |u - v| \leqslant \delta\}.$$

1. ω_f est croissante et $\omega_f(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$;
2. $\forall\ \delta_1, \delta_2,\ \omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$;
3. $\forall \lambda, \delta \in \mathbb{R}^+,\ \omega_f(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\omega_f(\delta)$.

Théorème 5. *[Que, p.518] **[DEV]** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On note ω son module de continuité uniforme. Pour $n \geqslant 1$, on définit le $n-$ème polynôme de Bernstein*

$$\forall x \in [0,1]\ B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Alors, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Plus précisément :

$$||f - B_n||_\infty \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Application 6. [Gou, p.286] Si f est continue et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

I.3 Interpolation de Lagrange

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ points de $[a,b]$, deux à deux distincts.

Définition 7. [Demai, p.22] Le **polynôme d'interpolation (de Lagrange)** de f aux points $x_0, ..., x_n$ est le polynôme :

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 8. *[Demai, p.22] P_n est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $P_n(x_i) = f(x_i)$.*

Proposition 9. *[Demai, p.24]* ***(Estimation de l'erreur)*** *On note $\pi_{n+1} = \prod_{j=0}^{n}(X - x_j)$. Si f est $n+1$ fois dérivable, on a une majoration de l'erreur commise par l'interpolation de Lagrange :*

$$||f - P_n||_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!}||\pi_{n+1}||_\infty \; ||f^{n+1}||_\infty.$$

Remarque 10. [Demai, p.24] Le terme à droite de l'inégalité précédente dépend à la fois de la quantité $||f^{n+1}||$, qui peut être grand si f oscille trop vite, et de la quantité $||\pi_{n+1}||$, qui est liée à la répartition des points x_i dans l'intervalle $[a, b]$.

Remarque 11. [**?**, p.28] Si les points x_i sont équidistants, on a

$$||\pi_{n+1}|| = O\left(\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right).$$

II Produit de convolution

On notera $L^p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des classes d'équivalence de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$||.||_p : f \mapsto \left(\int_R |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 12. [Hir, p.148] **(Produit de convolution)** Soient p, q deux exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Si $f \in L^p(R)$ et $g \in L^q(R)$, on définit le produit de convolution de f et g, noté $f * g$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \; (f * g)(x) = \int_R f(x-y)g(y)dy.$$

Proposition 13. *[Hir, p.148] La convolution est une forme bilinéaire symétrique.*

Définition 14. [Can, p.290] **(Théorème de régularité)** Soit $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $\varphi * f$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$d^n(\varphi * f) = (d^n\varphi) * f.$$

Définition 15. [Hir, p.151] **(Approximation de l'unité)** On appelle approximation de l'unité toute suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R})$ satisfaisant les propriétés:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \geqslant 0$ et $\int \phi_n(x)dx = 1$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \phi_n(x)dx = 0$.

Proposition 16. *[Hir, p.152] Soient $p \in [1; \infty[$, et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Si $f \in L^p$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f * \phi_n \in L^p$ et on a:*

$$||f * \phi_n||_p \leqslant ||f||_p \text{ et } ||f - f * \phi_n||_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[Can, p.289] On note $C_k^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

Exemple 17. Soit $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact d'intégrale 1. Alors, la famille $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in R^d, \; \varphi_n(x) = n^d\varphi(nx)$$

est une approximation de l'unité.

Théorème 18. *[Can, p.295] Pour tout $p \geqslant 1$, $C_k^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}), ||.||_p)$.*

Exemple 19. [Can, p.292] **(Approximations des fonctions indicatrices)** Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ce^{-1/(1-x^2)}\mathbb{1}_{]-1,1[}(x) \end{array}$$

où C est la constante de normalisation de l'intégrale. On a φ appartient à $C_k^\infty(\mathbb{R})$. Et alors $f :\mapsto \mathbb{1}_{]1,2[}(x)$ est approchée par les $\varphi_n * f$ dans L^1.

III Approximation de fonctions périodiques

Dans cette partie, C désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $2\pi-$périodiques. On munit C de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|f(t)|.$$

III.1 Série de Fourier

Définition 20. [Que, p.69] Soit $p \in [1;+\infty[$. $L^p(\mathbb{T})$ désigne l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et Lebesgure-mesurables telles que

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p} < +\infty.$$

soit la norme pour cet espace.

Définition 21. [Que, p.70] Soient $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$. On définit le $n-$ème coefficient de Fourier de f par:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

La somme partielle d'indice N ($\geqslant 0$) est:

$$S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}.$$

Définition 22. [Que, p71] Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, on définit le produit de convoluition de f et g défini pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

Théorème 23. *[Can, p.308]* ***(Convergence dans*** L^2***)*** *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. On a :*

$$||S_N(f) - f||_2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

III.2 Convergence au sens de Fejér

Définition 24. [Que, p.77] Pour tout $N \geqslant 0$, le noyau de **Dirichlet** d'ordre N est défini par $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$. Le noyau de **Fejer** d'ordre N est $K_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x)$.

Proposition 25. *[Que, p.76] Pour tout $N \geqslant 1$, le noyau de Fejér K_N vérifie:*

1. *$||K_N||_1 = 1$ et $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx)}{\sin(x/2)}\right)^2 \geqslant 0$;*
2. *$\sigma_N(f) := \frac{S_0(f)+...+S_{N-1}(f)}{N} = f * K_N$ (**somme de Fejér** d'indice N de f).*

Théorème 26. *[Que, p.84]* ***(Théorème de convergence de Fejér) [DEV]***

1. *Si $f \in C$, alors $\forall N \geqslant 1$, $||\sigma_N(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty$ et $\lim_{N\to\infty}||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$.*
2. *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ où $1 \leqslant p < \infty$, alors $\forall N \geqslant 1$, $||\sigma_N(f)||_p \leqslant ||f||_p$ et $\lim_{N\to\infty}||\sigma_N(f) - f||_p = 0$.*

Corollaire 27. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$*

Corollaire 28. *Si $f, g \in L^1$ sont telles que $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f = g$ presque partout.*

III.3 Convergence ponctuelle

Théorème 29. *[Gou, p.261]* ***(Théorème de Dirichlet)*** *Si f est $2\pi-$périodique et continue et C^1 par morceaux alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $S_N(f)(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*

Exemple 30. [Gou, p.261] Le théorème de Dirichlet nous permet de calculer des sommes nos triviales. En considérant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodiques égale à $1 - x^2/\pi^2$ sur $[-\pi, \pi]$, on peut montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

.

Théorème 31. *[Gou, p.424] **(Banach-Steinhaus)** Soit E un Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de $\mathcal{L}_c(E,F)$.*

$$Si : \forall x \in E, \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty$$

$$Alors : \sup_{i\in I} \||T_i\|| < +\infty$$

Corollaire 32. *[Gou, p.425] Il existe une série de Fourier divergente en 0.*

IV Annexe: ce que l'on aurait pu inclure

Le théorème de Runge est un peu dans la limite du cadre de cette leçon (mais peut faire l'objet d'un développement).

Théorème 33. *[Que2, p.124] **(Théorème de Runge)** Soit K un compact de $\mathbb{C}$ de complémentaire connexe. Soit $a \in K^c$. Alors:*

$$z \mapsto \frac{1}{z-a} \text{ est limite uniforme sur } K \text{ de polynômes.}$$

Dans la première partie, on aurait pu inclure une sous-partie sur les polynômes orthogonaux (toutes les notions suivantes ont été prises dans *Objectif agrégation* de V. Beck, J. Malick, G. Peyre).

Définition 34 (p.110)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $\rho : I \to \mathbb{R}$ est une fonction poids si elle est mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty.$$

Définition 35 (p.107)**.** Soit $(H, < . >)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est :

- orthonormée $(\forall i, j \in I, < e_i, e_j >= 0)$;
- totale $(H = \overline{Vect(e_i, i \in I)}.)$

Définition 36 (p.110)**.** On appelle famille des polynômes orthogonaux associé à la fonction poids ρ la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes obtenue en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 37 (p.112)**.** ***(Base hilbertienne de polynômes orthogonaux)*** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux associé à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

References

[Gou] Xavier Gourdon *Les maths en tête-Analyse*, Ellipses, 2ème édition, 2008.

[Hir] François Hirsch, Gilles Lacombe *Éléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices*, Masson, 1997.

[Que] Hervé Queffélec, Claude Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2013.

[Que2] Hervé Queffélec *Topologie Cours et exercices corriges*, Dunod, 2006

[Demai] Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, collection Grenoble sciences, 1991.

[Can] Bernard Candelpergher *Calcul intégral*, Cassini, 2009.