Formule de la coaire, volume des boules, aire des sphères

1 Résultat du plan : la formule de la coaire

Théorème 1. [Schw, page 694] (formule de la coaire) Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, et $h : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 dont le gradient ne s'annule pas. Pour chaque $w \in h(\Omega)$, soit $\Sigma_w = h^{-1}(\{w\})$: on note σ_w sa mesure superficielle. On a

$$\Omega = \bigsqcup_{w \in h(\Omega)} \Sigma_w.$$

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable. Alors,

1. Pour presque tout $w \in h(\Omega)$, la fonction $y \in \Sigma_w \mapsto \dfrac{f(y)}{\|\nabla_h(y)\|}$ est intégrable pour la mesure σ_w.
2. La fonction $w \in h(\Omega) \mapsto \displaystyle\int_{\Sigma_w} \frac{f(y)}{\|\nabla_h(y)\|}\, \mathrm{d}\sigma_w(y)$, bien définie presque partout, est intégrable sur $h(\Omega)$, et

$$\int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{h(\Omega)} \left(\int_{\Sigma_w} \frac{f(y)}{\|\nabla_h(y)\|}\, \mathrm{d}\sigma_w(y) \right) \mathrm{d}w.$$

2 Volume des boules et aire des sphères

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $R \geqslant 0$, soit $V^{(N)}(R)$ le volume de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^N$ de rayon R. Si $R \neq 0$, on a

$$V^{(N)}(R) = \int_{B(0,R)} \mathrm{d}x \underset{y = x/R}{=} \int_{B(0,1)} R^N\, \mathrm{d}y = R^N V^{(N)}(1),$$

et la formule est encore vraie pour $R = 0$.

On peut écrire

$$\Omega := B(0,1) \setminus \{0\} = \bigsqcup_{r \in]0,1[} \mathbb{S}_r,$$

où $\mathbb{S}_r$ est la sphère centrée en 0 et de rayon r. On a $\mathbb{S}_r = h^{-1}(\{r\})$, où $h : x \in \Omega \mapsto \|x\|$ est C^1, et a pour gradient $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$, qui ne s'annule pas sur Ω. La formule de la coaire appliquée à $f : x \in \Omega \mapsto 1$ donne alors

$$V^{(N)}(1) = \int_{B(0,1)\setminus\{0\}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{S}_r} \mathrm{d}\sigma_r \right) \mathrm{d}r = \int_0^1 \sigma_r(\mathbb{S}_r)\, \mathrm{d}r.$$

Or, au vu de la définition de la mesure superficielle, puisque chaque $\mathbb{S}_r$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $N-1$, on a :

$$\forall r > 0, \sigma_r(\mathbb{S}_r) = r^{N-1}\sigma_1(\mathbb{S}_1).$$

Ainsi,

$$V^{(N)}(1) = \sigma_1(\mathbb{S}_1) \int_0^1 r^{N-1}\, \mathrm{d}r = \frac{1}{N}\sigma_1(\mathbb{S}_1).$$

En définitive, pour tout $R > 0$, $V^{(N)}(R) = \dfrac{R^N}{N}\sigma_1(\mathbb{S}_1) = \dfrac{R}{N}\sigma_R(\mathbb{S}_R)$, d'où l'on déduit la proposition suivante :

Proposition 2. Pour tous $N \in \mathbb{N}^*$ et $R > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(V^{(N)}(R) \right) = \sigma_R(\mathbb{S}_R).$$

Preuve. Par ce qui précède,

$$\begin{aligned}\sigma_R(\mathbb{S}_R) = \frac{N}{R} V^{(N)}(R) = N R^{N-1} V^{(N)}(1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^N V^{(N)}(1) \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(V^{(N)}(R) \right).\end{aligned}$$

□

Exemple 3. En dimension 3, à partir de la formule (bien connue) $V^{(3)}(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, on retrouve l'aire d'une sphère de rayon R :

$$\forall R > 0, \quad \sigma_R(\mathbb{S}_R) = 4\pi R^2.$$

3 Calcul direct de l'aire des sphères

Soit maintenant $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, et soit $f : x \in \Omega \mapsto e^{-\|x\|^2}$. La fonction f étant intégrable sur Ω, la formule de la coaire s'applique, et donne

$$\begin{aligned}
\pi^{N/2} \underset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{S}_r} e^{-r^2}\,\mathrm{d}\sigma_r \right) \mathrm{d}r \\
&= \sigma_1(\mathbb{S}_1) \int_0^\infty r^{N-1} e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \\
&\underset{t=r^2}{=} \frac{1}{2}\sigma_1(\mathbb{S}_1) \int_0^\infty t^{N/2-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\,\sigma_1(\mathbb{S}_1)\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

Proposition 4. L'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$ est $\dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$.

De ce résultat, on déduit la valeur de $\sigma_R(\mathbb{S}_R) = R^{N-1}\sigma_1(\mathbb{S}_1)$ pour tout $R > 0$, et celle de $V^{(N)}(R) = \dfrac{R^N}{N}\sigma_1(\mathbb{S}_1)$ grâce à la proposition 2.

Corollaire 5. Le volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^N$ est

$$V^{(N)}(1) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}.$$

Exemple 6. En dimension 3, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r^2 e^{-r^2}\,\mathrm{d}r &= -\frac{1}{2}\int_0^\infty r\cdot(-2r)\cdot e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \\
&\underset{IPP}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\pi}}{4},
\end{aligned}$$

donc $\sigma_1(\mathbb{S}_1) = \dfrac{4\pi^{3/2}}{\sqrt{\pi}} = 4\pi$. On retrouve bien la formule

$$\sigma_R(\mathbb{S}_R) = 4\pi R^2,$$

puis $V^{(3)}(R) = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

4 Calcul direct du volume des boules

Pour calculer directement $V^{(N)}(1)$, on peut, comme cela est fait dans [Can], calculer une intégrale de deux manières différentes. D'une part,

$$\int_0^\infty e^{-r} V^{(N)}(\sqrt{r})\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty e^{-r} r^{N/2} V^{(N)}(1)\,\mathrm{d}r = V^{(N)}(1)\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right),$$

et d'autre part, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-r} V^{(N)}(\sqrt{r})\,\mathrm{d}r &= \int_0^\infty e^{-r}\left(\int_{\|x\|^2 \leqslant r} \mathrm{d}x \right)\mathrm{d}r \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^{\|x\|^2} \mathrm{d}r \right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\|x\|^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi^{N/2},
\end{aligned}$$

d'où

$$V^{(N)}(1) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}.$$

Remarques

- Convient pour les leçons 234 et 236.
- La formule de la coaire est une généralisation du théorème de Fubini : le résultat peut apparaître dans la leçon 235.
- On peut aussi calculer directement le volume de la boule unité en trouvant une relation de récurrence entre $V^{(N)}(1)$ et $V^{(N-2)}(1)$. Pour cela, voir Briane-Pagès, *Théorie de l'intégration*.

Références

[Schw] Laurent Schwartz, *Analyse mathématique, tome 2*, Hermann, 1967.

[Can] Bernard Candelpergher, *Calcul intégral*, Cassini, 2009.