Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

I Généralités sur les formes quadratiques réelles

I.1 Premières définitions

Définition 1. [Gou alg, p.227] On dit que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique si pour tous $x, y \in E$, les applications $\varphi(x,\cdot)$ et $\varphi(\cdot,y)$ sont des formes linéaires et $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Définition-proposition 2. [Gou alg, p.230] On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x,x)$. Pour toute forme quadratique q sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de q et on a :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)).$$

Dans toute la suite, q sera une forme quadratique sur E fixée, de forme polaire φ.

I.2 Représentation matricielle

Définition 3. [Gou alg, p.229] Soit q une forme quadratique sur E et $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On appelle M la matrice de q dans la base B la matrice de la forme polaire φ de q dans la base B: $M = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On appelle rang de q le rang de M. (La matrice d'une forme quadratique est symétrique.)

Exemple 4. [Gou alg, p.229] On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère q la forme quadratique définie par:$u = (x,y,z) \mapsto q(u) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$. Alors la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposition 5. ***(Formule de changement de base)*** *Soient B et B' deux bases de E. On note P la matrice de passage de B à B', et A la matrice de φ dans B. Alors la matrice A' de φ dans B' est : $A' = {}^tPAP$.*

I.3 Orthogonalité

Définition 6. [Gou alg, p.230] On appelle cône isotrope de q l'ensemble $C_q = \{x \in E,\ q(x) = 0\}$. On dit que q est définie si $C_q = \{0_E\}$. Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope (pour q) si $q(x) = 0$, *i.e.* si $x \in C_q$.

Définition 7. [Gou alg, p.230] Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux selon q (ou selon φ) si $\varphi(x,y) = 0$. Soit $A \subset E$. On appelle orhogonal de A selon q (ou selon φ) l'ensemble $A^\perp := \{y \in E,\ \forall x \in A,\ \varphi(x,y) = 0\}$. Deux sous-ensembles A et B de E sont dits orthogonaux selon q (ou selon φ) si pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$, $\varphi(x,y) = 0$. On note alors $A \perp B$.

Définition 8. [Gou alg, p.231] On appelle noyau de q le s.e.v. de E noté $\ker q$ défini par : $\ker q = E^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in E\ \varphi(x,y) = 0\}$. La forme φ est dite non dégénérée si $\ker \varphi = \{0_E\}$ et dégénérée sinon. (Remarque : On a $\ker(q) \subset C_q$.)

Remarque 9. [Gou alg, p.231] Si q est définie alors q est non dégénérée. La réciproque est fausse (on peut par exemple considérer $q(u) = q(x,y) = x^2 - y^2$).

II Classification des formes quadratiques

II.1 Bases orthogonales

Définition 10. [Gou alg, p.231] Une base B de E est dite $q-$orthogonale si pour tout couple d'élements distncts (e, e') de B, on a $\varphi(e,e') = 0$.

Remarque 11. Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base $q-$orthogonale de E, alors

$$\forall x = (x_i) \in \mathbb{K}^n,\ q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i).$$

Théorème 12. *[Romb, p.469]* ***(Théorème de réduction de Gauss)*** *Pour toute forme quadratique non nulle sur q, il existe un entier r compris entre 1 et n, des scalaires non nuls $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et des formes linéaires $(\ell_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ indépendantes dans l'espace dual E^* tels que $\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k \ell_k^2(x)$.*

Exemple 13. [Grif, p.302] Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par : $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$. La réduction de Gauss donne : $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 + 2x_3)^2 - x_3^2$.

Théorème 14. *[Romb, p.473]* ***(Interprétation matricielle)*** *Avec les notations précédentes, il existe une base $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Si r est le rang de q, alors exactement r λ_i sont non nuls. La base (f_i) est alors $q-$orthogonale.*

II.2 Théorème d'inertie de Sylvester

Définition 15. [Romb, p.475] Une forme quadratique réelle q sur E est dite définie positive (resp. définie négative) si $q(x) > 0$ (resp. $q(x) < 0$) pour tout $x \in E \backslash \{0\}$.

Proposition 16. *[Romb, p.475]* ***(Cauchy-Schwarz)*** *Si q est une forme quadratique positive, on a $|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$ pour tous vecteurs $x, y \in E$.*
Si q est une forme quadratique positive, on a $C_q = ker(q)$.

Définition 17. On appelle signature de la forme quadratique q, le couple (p, r) où p (resp. r) est la dimension maximum d'un sev de E où q est définie positive (resp. définie négative).

Théorème 18. *[Grif, p.303]* ***(Théorème de Sylvester)*** *Il existe une base (e_i) de E telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a: $q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... x_r^2$, où $r = rang(q)$ et p est un entier qui ne dépend que de la forme quadratique. (On peut y lire la signature de q: $(p, r - p)$.*

Corollaire 19. *Si q est définie, elle est définie positive ou définie négative.*

Théorème 20. *[Romb, p.478] Si $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de q dans une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. La forme q est définie positive si et seulement si tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.*

Théorème 21. *[Grif, p.307]* ***(Orthogonalisation simultanée)*** *Soient q une forme quadratique définie positive et q' une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthonormée pour q et orthogonale pour q' simultanément.*

II.3 Application en calcul différentiel

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On condidère une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable.

Définition-proposition 22. [Gou an, p.306] Pour tout $a \in U$, la matrice hessienne de f en a est

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}.$$

Le théorème de Schwarz donne la symétrie de $H_f(a)$ pour tout $a \in U$.

Théorème 23. *[Gou an, p.316] Soit $a \in U$ tel que $df(a) = 0$ et soit q la forme quadratique associée à $H_f(a)$. Alors:*
Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, alors q est une forme quadratique positive (resp. négative);
Si q est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Lemme 24. ***(DEV)*** *[Rouv, p.209] Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $h \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tels que pour tout $A \in V$, $A =^t h(A) A_0 h(A)$.*

Lemme 25. ***(DEV)*** *[Rouv, p.354]* ***(Lemme de Morse)*** *Soient U un ouvert de R^n contenant l'origine et $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 telle que $df(0) = 0$ et que la forme quadratique $d^2 f(0)$ est non dégénérée, de signature (p,n-p). Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$, et*

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + ... + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - ... - \varphi_n(x)^2.$$

II.4 Application : racines distinctes d'un polynôme réel (DEV)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ et $P(X) = a \prod_{i=1}^{q} (X - \alpha_i)^{m_i}$ sa décomposition en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Définition 26. [Gant, p199] Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $s_i = \sum_{k=1}^{q} m_k \alpha_k^i$ (Sommes de Newton). Soit la forme quadratique réelle définie par

$$\begin{array}{cccc} S : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_0, ..., x_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{i,j=0}^{n-1} s_{i+j} x_i x_j \end{array}$$

Théorème 27. *(admis)*
Les sommes de Newton sont réelles.

Théorème 28. *[Gant, p200](DEV) Soit (s, t) la signature de S, alors $s + t$ est le nombre de racines distinctes de P et $s - t$ le nombre de racines réelles distinctes.*

III Coniques

III.1 Généralités

Définition 29. [Aud, p.222] Un polynôme de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$ est une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un point O, une forme quadratique non nulle q, une forme linéaire L_O et une constante C_O tels que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O.$$

Remarque 30. [Aud, p.222] Dans la définition précédente, q ne dépend pas du point O, contrairement à la partie linéaire et la constante.

Définition 31. [Merc, p.439] Une conique d'un polynôme de degré 2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2,\ f(M) = 0\}$.

Soit P un plan affine où un point M a pour coordonnées cartésiennes (x, y)

Définition 32. [Aud, p.223] La conique de P définie par le polynôme

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L(\overrightarrow{OM}) + c$$

est dite propre si la forme quadratique définie sur $P \times \mathbb{R}$ par

$$Q(u, x) = q(u) + L(u)x + cx^2$$

est non dégénérée. Cette forme quadratique est dite homogénéisée de f.

Exemple 33. soit $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + 4$ alors son homogénéisée est $Q(x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 + 4z^2$. soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + 32!y$ alors son homogénéisée est $Q(x, y, z) \mapsto x^2 + 32!yz$.

Définition 34. [Romb, p.525] Un point $M_0(x_0, y_0) \in P$ est un centre de C_f si $\forall (x, y) \in P$ $f(x + x_0, y + y_0) = q(x, y) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si un tel point M_0 existe et est unique, on dit que C_f est à centre.

Théorème 35. *[Romb, p.525] On a l'équivalence q est non dégénérée $\Longleftrightarrow$ C_f est à centre. Ce centre M_0 vérifie $L_{M_0} = 0$*

III.2 Classification affine

On se place dans le plan affine réel. Soit f un polynôme de degré 2, de forme quadratique q et Q son homogénéisé.

Théorème 36. *[Aud, p.175]* ***Classification des coniques propres*** *cf annexe*

Théorème 37. *[Aud, p.175]* ***Classification des coniques impropres*** *cf annexe*

III.3 Classification euclidienne

Définition 38. [Merc, p.463-464] Quitte à considérer une base qui est orthogonale pour q on peut écrire $f(x, y) = ax^2 + cy^2 + dx + ey + k$. Supposons l'homogénéisée de f non dégénérée. Alors il existe des réels a',b' et c' tels que $a'b' \neq 0$:
si $ac > 0$: C_f vérifie l'équation $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$. On dit que C_f est une **ellipse**.
si $ac < 0$: C_f vérifie l'équation $\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$. On dit que C_f est une **hyperbole**.
si $ac = 0$: C_f vérifie l'équation $\frac{x'^2}{a'^2} + b'y' + c' = 0$. On dit que C_f est une **parabole**.

III.4 Définition monofocale

Soit $\mathcal{D}$ une droite de P, $F \in P \backslash \mathcal{D}$ et $e > 0$

Définition 39. [Romb, p.497] On appelle conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble : $\Gamma = \{M \in P,\ d(M, F) = e.d(M, \mathcal{D})\}$. Pour $e < 1$ on dit que Γ est une **ellipse**. Pour $e = 1$ on dit que Γ est une **parabole**. Pour $e > 1$ on dit que Γ est une **hyperbole**.

Définition 40. [Romb, p.498] La perpendiculaire Δ à $\mathcal{D}$ passant par F est l'axe focal ou grand axe de la conique Γ. On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$. Pour tout $M \in P$, on notera H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.

Soit $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{FK}}{FK}$ et $\overrightarrow{j}$ un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}$.

Remarque 41. [Romb, p.499] Dans le repère $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on a les coordonnées suivantes : $F(x_F, 0)$,$K(x_K, 0)$,$M(x, y)$,$H(x_K, y)$

Théorème 42. *[Romb, p.499] Dans le repère orthonormé $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la conique Γ a pour équation :*

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2x_K e^2 x - e^2 {x_K}^2 = 0$$

Corollaire 43. *Les caractérisations monofocales et cartésiennes des coniques, ellipses (excepté le cercle), hyperboles et paraboles sont équivalentes.*

III.5 Existence de coniques (DEV)

Lemme 44. *[Eid, p.19] Soit M, N deux points distincts du plan de coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Alors la droite (MN) a pour équation dans le repère barycentrique associé à ABC:* $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$

Lemme 45. *[Eid, p.51]* ***(Conique circonscrite)*** *Soit ABC un triangle de référence non plat. L'équation générale en coordonnées barycentriques d'une conique passant par les trois points A, B, C est $pYZ + qZX + rXY = 0$, où p, q, r sont non tous nuls.*

Théorème 46. *[Eid, p.52] Soient A, B, C, D, E cinq points deux à deux distincts du plan. Alors il existe une conique passant par ces cinq points. De plus, s'il n'existe pas parmi ces cinq points quatre points alignés, alors cette conique est unique.*

Théorème 47. *[Eid, p.90] Soient six points distincts A, B, C, A', B', C', trois à trois non alignés. Supposons l'existence de P, Q, R, qui sont les points d'intersection de (BC') et $(B'C)$, $(A'C)$ et (AC'), (AB') et $(A'B)$ respectivement. Alors, il existe une conique passant par A, B, C, A', B', C' si et seulement si P, Q, R sont alignés (cf annexe).*

IV Annexe

Théorème 48. *[Aud, p.175-176-177]* ***Classification des coniques propres*** *Soit Q non dégénérée, alors on a la classification des coniques suivantes :*

signature de Q	*signature de q*	*Conique*	*Equation réduite*
(3,0) ou (0,3)	*(2,0) ou (0,2)*	$\varnothing$	$x^2+y^2+1=0$
(2,1) ou (1,2)	*(2,0) ou (0,2)*	*Ellipse*	$x^2+y^2=1$
(2,1) ou (1,2)	*(1,1)*	*Hyperbole*	$x^2-y^2=1$
(2,1) ou (1,2)	*(1,0) ou (0,1)*	*Parabole*	$x^2=y$

Théorème 49. *[Aud, p.175-176-177]* ***Classification des coniques impropres*** *Soit Q dégénérée, alors on a la classification des coniques suivantes :*

signature de Q	*signature de q*	*Conique*	*Equation réduite*
(2,0) ou (0,2)	*(2,0) ou (0,2)*	*Singleton*	$x^2+y^2=0$
(1,1)	*(1,1)*	*Deux droites sécantes*	$x^2-y^2=0$
(2,0) ou (0,2)	*(1,0) ou (0,1)*	$\varnothing$	$x^2+1=0$
(1,0) ou (0,1)	*(1,0) ou (0,1)*	*Droite double*	$x^2=0$
(1,1)	*(1,0) ou (0,1)*	*Deux droites parallèles*	$x^2=1$

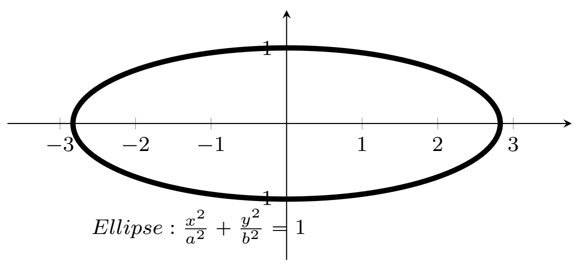
Algorithme 50. ***(Détail de l'algorithme de Gauss)*** *Soit q une forme quadratrique sur E, de matrice $(a_{i,j})$ dans une base B de E et $(x_1,...,x_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans B. On répète récursivement le procédé suivant :*

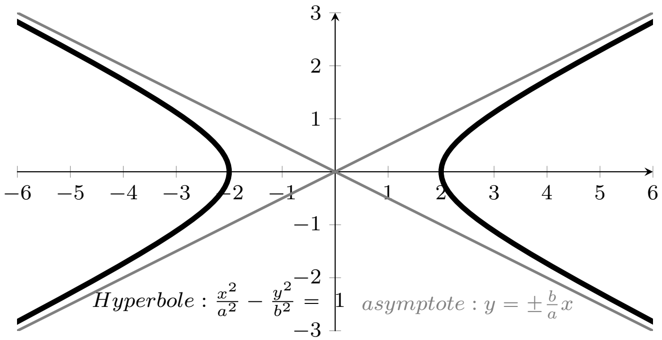
1. *<u>1er cas :</u> Il existe $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_{i,i} \neq 0$. On peut supposer sans perte de généralités $a_{1,1} \neq 0$, On a pour tout $x \in E$,*

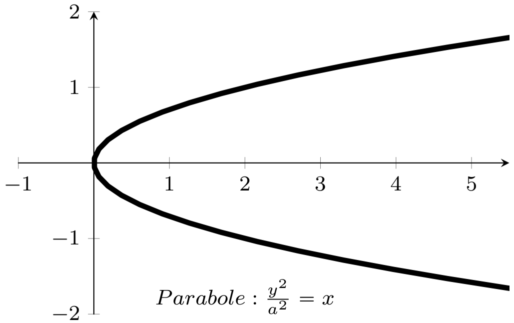
$$q(x) = a_{1,1}x_1^2 + 2x_1A(x_2,...,x_n) + B(x_2,...,x_n) = a_{1,1}(x_1 + \frac{A}{a_{1,1}})^2 + (B - \frac{A^2}{a_{1,1}})$$

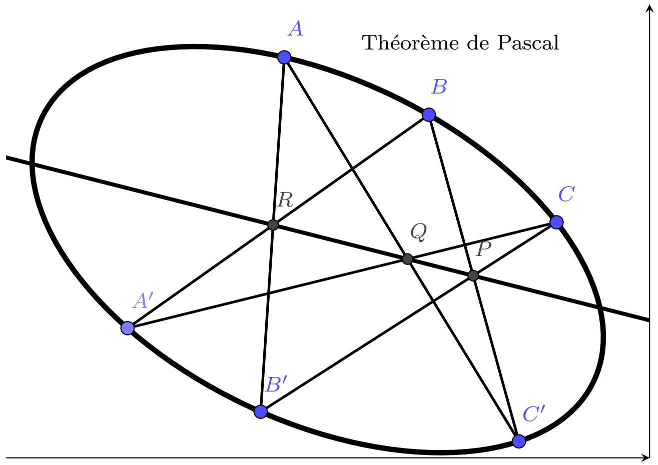
2. *<u>2eme cas :</u> Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_{i,i} = 0$, alors il existe $i < j$ tels que $a_{i,j} \neq 0$. On peut supposer $i=1$ et $j=2$. On utilisel$\ell_1\ell_2 = \frac{1}{4}((\ell_1+\ell_2)^2 - (\ell_1-\ell_2)^2)$ et pour tout $x \in E$,*

$$\begin{aligned} q(x) &= 2a_{1,2}(x_1 + B(x_3,...,x_n))(x_2 + A(x_3,...,x_n)) + C(x_3,...,x_n) - \frac{AB}{2a_{1,2}} \\ &= \frac{2a_{1,2}}{4}\left((x_1+x_2+A+B)^2 - (x_1-x_2+(A-B))^2\right) + C(x_3,...,x_n) - \frac{AB}{2a_{1,2}} \end{aligned}$$









References

[Aud] Michèle Audin, *Géométrie, L3M1*, EDP sciences

[Eid] Jean-Denis Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage et Mounet, 2009 (Livre utilisé pour le DEV "théorème de Pascal")

[Gou alg] Xavier Gourdon, *Les maths en tête, algèbre.*

[Gou an] Xavier Gourdon, *Les maths en tête, analyse.*

[Grif] Joseph Grifone, *Algèbre linéaire*, deuxième édition.

[Romb] Jean-Etienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, algèbre et géométrie*, deuxième édition.

[Rouv] François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, quatrième édition.

[Gant] Felix R Gantmacher, *Théorie des matrices, volume 2*

[Merc] Dany-Jack Mercier,*Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'Agrégation*