Dev 34 - Wantzel et la trisection de l'arc (Algèbre)

Théorème : [de la base télescopique]

Soient deux extensions $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}/\mathbb{L}$. Alors $\mathbb{M}$ est une extension de $\mathbb{K}$ et :

$$[\mathbb{M}:\mathbb{K}] = [\mathbb{M}:\mathbb{L}]\cdot[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$$

Corollaire : [de Wantzel]

Si $t \in \mathbb{R}$ est constructible, alors $\begin{cases} t \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q} \\ \text{il existe } q \in \mathbb{N} \text{ tel que } [\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}] = 2^q \end{cases}$

Proposition : La trisection de l'arc est impossible (en général).

Preuve théorème :

La composée de 2 morphismes de corps est un morphisme de corps, donc $\mathbb{M}$ est une extension de $\mathbb{K}$.

Pour le degré : Soient $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ deux bases algébriques respectives de $\begin{cases} \mathbb{L} \text{ vu comme } \mathbb{K}\text{-e.v} \\ \mathbb{M} \text{ vu comme } \mathbb{L}\text{-e.v} \end{cases}$

Montrons que $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base algébrique de $\mathbb{M}$ vu c. $\mathbb{K}$-e.v.

- Soient $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ et $\{j_1, \dots, j_m\} \subset J$, (alors $\{(i_k, j_l) ; k \in \{1,\dots,n\}, l \in \{1,\dots,m\}\}$ est un ss-ensemble fini arbitraire de $I\times J$)

$\forall (k,l) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}$, soit $\lambda_{k,l} \in \mathbb{K}$.

Supposons que $\sum_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le l\le m}} \lambda_{k,l}\, e_{i_k} f_{j_l} = 0_{\mathbb{M}}$

Alors $\sum_{1\le l\le m} \underbrace{\left(\sum_{1\le k\le n} \lambda_{k,l}\, e_{i_k}\right)}_{\in \mathbb{L}} f_{j_l} = 0_{\mathbb{M}}$, d'où $\forall l \in \{1,\dots,m\}$, $\sum_{k=1}^{n} \overbrace{\lambda_{k,l}}^{\in\mathbb{K}}\, e_{i_k} = 0_{\mathbb{L}}$

puisque $(f_j)_{j\in J}$ est libre dans $\mathbb{M}$ vu c. $\mathbb{L}$-e.v

Ainsi, c. $(e_i)_{i\in I}$ est libre $\mathbb{L}$ vu c. $\mathbb{K}$-e.v, alors $\forall l \in \{1,\dots,m\}, \forall k \in \{1,\dots,n\}$, $\lambda_{k,l} = 0_{\mathbb{K}}$

Donc $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est $\mathbb{K}$-libre dans $\mathbb{M}$.

- Soit $x \in \mathbb{M}$.

Ĉ $\mathbb{M} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{L}}((f_j)_{j\in J})$, alors il existe $\{j_1, \dots, j_m\} \subset J$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{L}$ tels que $x = \sum_{l=1}^{m} \underbrace{\gamma_l}_{\in\mathbb{L}} f_{j_l}$

Ĉ $\mathbb{L} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}((e_i)_{i\in I})$, alors il existe $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ et $\begin{cases} \lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{n,1} \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ \lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{n,m} \in \mathbb{K} \end{cases}$ tels que : $\forall l \in \{1,\dots,m\}$, $\gamma_l = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,l}\, e_{i_k}$

Ainsi $x = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,l}\, e_{i_k} f_{j_l}$ est une combinaison $\mathbb{K}$-linéaire finie de $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$

Donc $\mathbb{M} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}((e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J})$

- Donc $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{M}$, donc $[\mathbb{M}:\mathbb{K}] = \#(I\times J) = (\#J)(\#I) = [\mathbb{M}:\mathbb{L}]\cdot[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$

Preuve corollaire :

• Commençons par montrer le résultat sur le degré.

Par le thm de Wantzel, il existe une tour d'extensions $\mathbb{Q}=\mathbb{L}_1\subset\mathbb{L}_2\subset\dots\subset\mathbb{L}_p\subset\mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} t\in \mathbb{L}_p \\ \forall j\in\{1,\dots,p-1\},\ [\mathbb{L}_{j+1}:\mathbb{L}_j]=2\end{cases}$$

Par le thm de la base télescopique, $[\mathbb{L}_p:\mathbb{Q}]=[\mathbb{L}_p:\mathbb{L}_{p-1}]\cdots[\mathbb{L}_2:\mathbb{L}_1]=2^{p-1}$

D'autre part, comme on a $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(t)\subset\mathbb{L}_p$ (par déf de $\mathbb{Q}(t)$),

alors $\underbrace{[\mathbb{L}_p:\mathbb{Q}]}_{(=2^{p-1})}=[\mathbb{L}_p:\mathbb{Q}(t)]\cdot[\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}]$ par le thm de la base télescopique.

Ainsi $[\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}]$ divise 2^{p-1}, et donc il existe $q\in\{0,\dots,p-1\}$ tel que $[\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}]=2^q$.

(déjà décomposé en facteurs premiers)

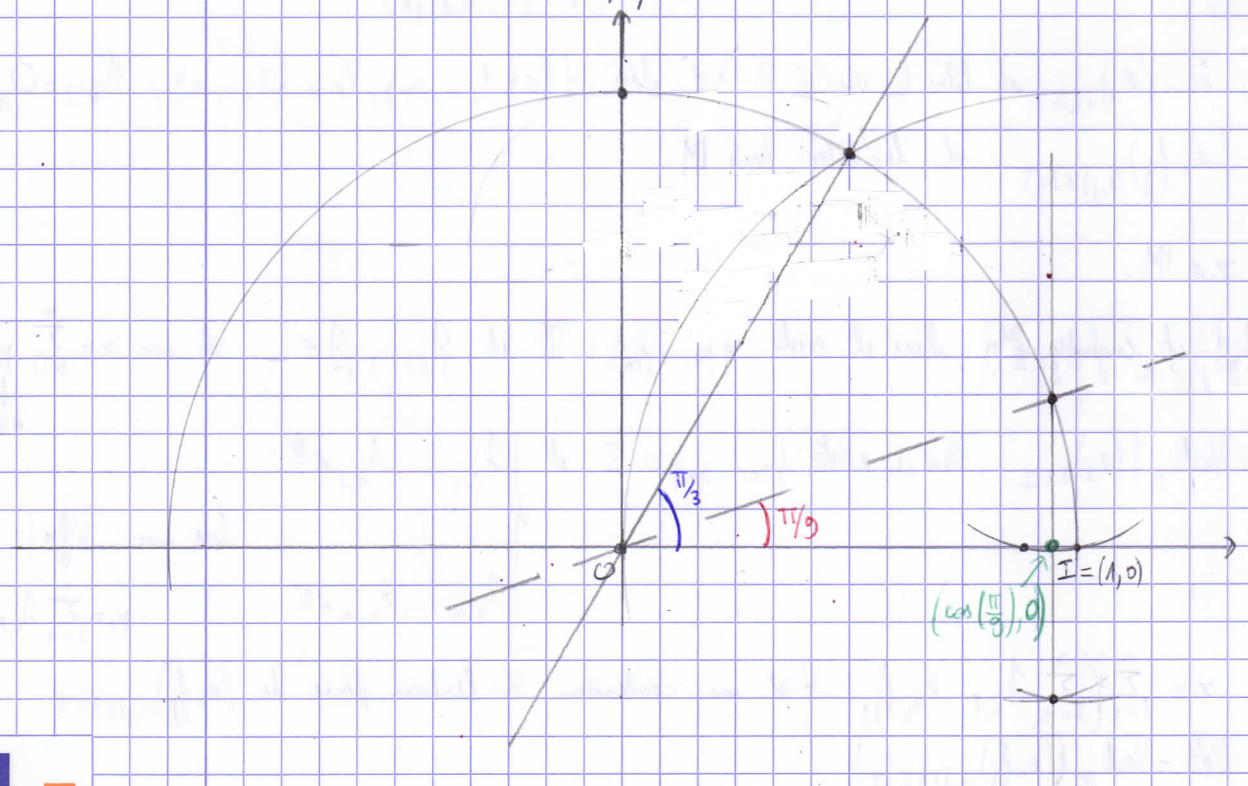
• Il reste à mq t est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Ĉ $[\mathbb{Q}(t):\mathbb{Q}]=2^q$, alors la famille $\{1,t,t^2,\dots,t^{2^q}\}$ est liée (car $2^q+1>2^q$) dans le $\mathbb{Q}$-e.v $\mathbb{Q}(t)$

Ainsi il existe $\alpha_0,\dots,\alpha_{2^q}\in\mathbb{Q}$ tq $\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\dots+\alpha_{2^q}t^{2^q}=0$

Donc $\sum_{k=0}^{2^q}\alpha_k X^k\in\mathbb{Q}[X]$ annule t, donc t est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Preuve proposition :



(Par l'absurde) supposons que la trisection de l'arc est possible en général.

On peut donc trisecter l'angle $\frac{\pi}{3}$, ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est constructible (voir dessin en page précédente)

Par le corollaire de Wantzel, $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $\left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) : \mathbb{Q}\right] = 2^k$.

D'autre part, on a, par linéarisation :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \cos(3\theta).$$

Ainsi $4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, d'où $P := 4X^3 - 3X - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[X]$ annule $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

Montrons que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(Par l'abs) supposons le contraire. Alors ($\hat{c}$ $\deg(P) = 3$) il existe un facteur de P de degré 1 dans $\mathbb{Q}[X]$.

Ainsi P admet une racine $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $p \wedge q = 1$.

On a alors $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, càd $8p^3 - 6pq^2 = q^3$, d'où $\begin{cases} p \mid q^3 \\ q^2 \mid 8p^3 \end{cases}$,

d'où $p \mid q$ et $q^2 \mid 8$ par le lemme de Gauss (car $p \wedge q^2 = q^2 \wedge p^3 = 1$),

donc $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$ et $p = \{\pm 1\}$ (car $p, q \in \mathbb{Z}$ et $p \wedge q = 1$)

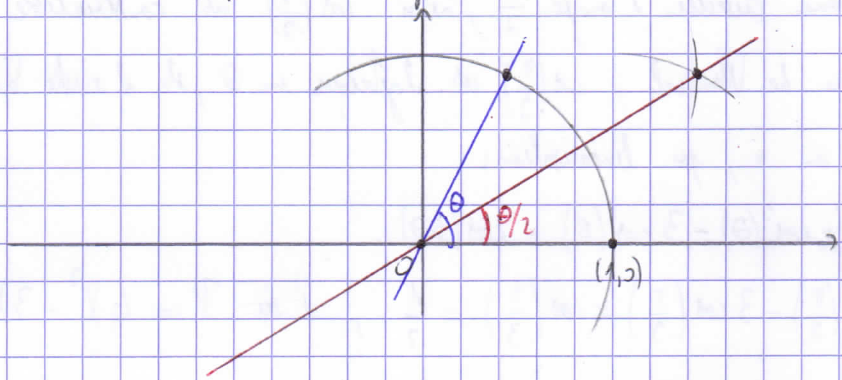
D'où $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$. Mais c'est absurde car $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$, $P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ et $P\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$

Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Ainsi $2^k = \left[\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right) : \mathbb{Q}\right] = 3$, absurde !

Donc la trisection de l'arc est impossible en général.

Commentaires additionnels :

- La bisection de l'arc est possible en général :



- Il existe une CNS de trisectabilité d'un arc donné :

$$\theta \in [0, 2\pi[\text{ trisectable } \iff 4X^3 - 3X - \cos(\theta) \text{ est réductible dans } \mathbb{Q}(\cos(\theta))[X]$$