Dev 22 – Matrices et déterminants de Gram (Analyse + Algèbre)

Déf: Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe) et $x_1, \dots, x_n \in E$.

$\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n) := (\langle x_i, x_j \rangle)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ est appelée la matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$

$G(x_1, \dots, x_n) = |\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n)|$ est appelé le déterminant de Gram de $x_1, \dots, x_n$.

Prop: a) Une matrice est une matrice de Gram ssi elle est hermitienne positive.

b) Soient $(E, \langle , \rangle)$ un esp. préhilbertien, et $x_1, \dots, x_n \in E$.

Alors $\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n)$ est définie ssi $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre dans E.

Thm: Soient $(E, \langle , \rangle)$ un esp. préhilbertien, $V \subset E$ un s.e.V, $(e_1, \dots, e_n)$ une base qcq de V, et $x \in E$

Notons $d := \mathrm{dist}(x, V)$ $\left(= \inf_{y\in V} \|x-y\| = \|x - p_V^{\perp}(x)\|\right)$. Alors $d^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

Preuve proposition :

a) • "$\Longrightarrow$" Soit $M := \mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n)$ où $x_1, \dots, x_n \in E$ et $(E, \langle , \rangle)$ est un esp. préhilbertien qcq.

Soient $F := \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $m := \dim(F)$ $(< +\infty)$

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_m)$ une BON de F

Soit $X_i := \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^m \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de x_i dans $\mathcal{B}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

On a $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k,l=1}^{m} \overline{x_i^k}\, x_j^l \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{m} \overline{x_i^k}\, x_j^k = X_i^* X_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

(corps sous-jacent à l'e.v E)

ainsi $M = (X_i^* X_j)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = N^* N$ où $N := (X_1 | X_2 | \dots | X_n) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Ainsi M est hermitienne car $M^* = (N^* N)^* = N^* (N^*)^* = N^* N = M$

positive car $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $\langle X, MX \rangle_{\mathbb{K}^n} = X^* M X = (NX)^* (NX) = \langle NX, NX \rangle_{\mathbb{K}^m} \geq 0$

($\langle , \rangle_{\mathbb{K}^n}$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien de $\mathbb{C}^n$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

• "$\Longleftarrow$" Réciproquement, soit $M := (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ hermitienne positive.

Alors il existe $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ hermitienne tq $M = H^2 = H^* H$

Si on note $X_1, \dots, X_n$ les colonnes de H alors la relation "$M = H^* H$" entraîne : $a_{ij} = X_i^* X_j = \langle X_i, X_j \rangle_{\mathbb{K}^n}$ $(\forall i, j \in \{1, \dots, n\})$

Donc $M = \mathrm{Gram}(X_1, \dots, X_n)$ est une matrice de Gram (sur l'e.v $\mathbb{K}^n$)

b) Notons $M := \mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n)$. Reprenons le N de "$\implies$" du point a).

On a :

$$M \text{ définie} \iff \Big(\forall X \in \mathbb{K}^n,\ \underbrace{X^* M X}_{(=\langle NX, NX\rangle_{\mathbb{K}^n})} = 0 \implies X = 0\Big)$$

$(\langle \,,\, \rangle_{\mathbb{K}^n}$ est définie$)$

$$\iff \big(\forall X \in \mathbb{K}^n,\ NX = 0 \implies X = 0\big) \iff \mathrm{Ker}(N) = \{0\}$$

$\Big(= (X_1 | \dots | X_n) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1) | \dots | \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_n))\Big)$

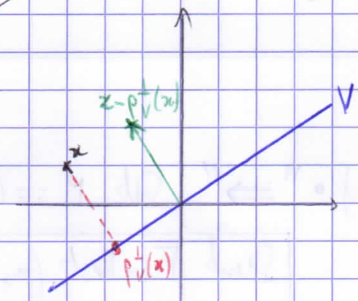
$\iff$ les x_i forment une famille libre dans E

Preuve théorème:

Notons $y := p_V^{\perp}(x)$. On a $\|x-y\| = d$ par le th. de projection sur un s.e.v complet dans un espace préhilbertien.

D'après le m. th., on a aussi : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle e_i, x\rangle = \langle e_i, y\rangle$ (car $\forall v \in V,\ \langle v, x - p_V^{\perp}(x)\rangle = 0$)

$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x-y\|^2$ (car $y \in V$ et ...)



Ainsi, si on note $M := \mathrm{Gram}(e_1, \dots, e_n, x)$, alors :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \langle e_1, x\rangle \\ & \mathrm{Gram}(e_1, \dots, e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n, x\rangle \\ \hline \langle x, e_1\rangle & \cdots & \langle x, e_n\rangle & \underbrace{\langle x, x\rangle}_{=\|x\|^2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \langle e_1, y\rangle + 0 \\ & \mathrm{Gram}(e_1, \dots, e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n, y\rangle + 0 \\ \hline \langle y, e_1\rangle & \cdots & \langle y, e_n\rangle & \|y\|^2 + \|x-y\|^2 \end{array}\right)$$

D'où $G(e_1, \dots, e_n, x) = G(e_1, \dots, e_n, y) + \|x-y\|^2\, G(e_1, \dots, e_n)$

(linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne)

Mais $\begin{cases} G(e_1, \dots, e_n, y) = 0 \text{ car } y \in V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \\ \|x-y\| = d \text{ pour rappel.} \end{cases}$

$\to$ (et donc, par la prop, $\mathrm{Gram}(e_1, \dots, e_n, y)$ est hermitienne positive non-définie)

Donc : $G(e_1, \dots, e_n, x) = d^2\, \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_{(\neq 0 \text{ d'après la prop, car } (e_i)_i \text{ est libre dans } E)}$

Donc $\boxed{d^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}}$

Commentaires additionnels :

- Le dernier résultat donne donc une forme assez explicite de $d(x,F)$:

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}} \quad \left(= \|x - p_F^\perp(x)\|\right)$$

Ce genre de résultat est inexistant dans le cadre général du th. de projection sur un convexe fermé dans un esp. de Hilbert, et peut être utilisé à des fins pratiques !

Résultats intermédiaires :

- Existence d'une "racine carrée" d'une matrice hermitienne positive
- 7 • Th. de projection sur un s.e.v complet dans un esp. préhilbertien