($\mathbb{K}^n$ est vu comme un $\mathbb{K}$-e.v)

Dev 11 – Complétude des e.v.n de dim $<+\infty$, Th de Riesz (Analyse + Algèbre)

Lemme 1 : Un e.v.n (E,N) est localement compact ssi sa boule unité fermée est compacte

Lemme 2 : Toute application linéaire bijective $\varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E,N)$ est un homéomorphisme. ((E,N) e.v.n qcq $\mathbb{K}$ = R ou C)

Théorème 1 : Un e.v.n (E,N) de dim $<+\infty$ est complet.

Théorème 2 : Un e.v.n (E,N) est de dim $<+\infty$ ssi il est localement compact.

Preuve lemme 1 :

Remarque : On admet que les compacts de $\mathbb{K}^n$ sont les fermés bornés. Ainsi, $\mathbb{K}^n$ est localement compact. On admet aussi que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

• "$\Rightarrow$" Supposons E localement compact.

* $1^{ère}$ étape : On montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{B}(0_E, \delta)$ est compact

Comme E est localement compact, alors 0_E admet un voisinage compact V.

De plus, on sait que $\{B(0_E, r), r>0\}$ est une base de voisinages de 0_E,

d'où il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait $0 \in B(0_E, \delta) \subset V$.

V est fermé, d'où $\overline{B}(0_E, \delta) = \overline{B(0_E,\delta)} \subset V$.

D'où $\overline{B}(0_E, \delta)$ est compact car fermé dans le compact V.

* $2^{ème}$ étape : On montre que $\overline{B}(0,1)$ est compacte, via l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \frac{1}{\delta} y \end{array}$$

Cette application est continue car $\frac{1}{\delta}$-Lipschitz

Donc $\overline{B}(0,1) = f(\overline{B}(0_E, \delta))$ est compact car image d'un compact par une fct continue.

• "$\Leftarrow$" Supposons $\overline{B}(0,1)$ compacte. On veut montrer que tout $x \in E$ admet un voisinage compact.

$\overline{B}(x,1) = \underbrace{\overline{B}(0,1) + x}$ est un voisinage compact de x.

(image de $\overline{B}(0,1)$ par la translation de vecteur x) Donc E est localement compact

Preuve lemme 2 :

• Montrons que φ est continue : (Remarque : ça ne nécessite pas la bijectivité) (Objectif : Mq $\exists C>0, \forall x \in \mathbb{K}^n, N(\varphi(x)) \leq \|x\|_\infty C$)

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

D'où $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $N(\varphi(x)) \leq |x_1| N(\varphi(e_1)) + \dots + |x_n| N(\varphi(e_n)) \leq \|x\|_\infty (N(\varphi(e_1)) + \dots + N(\varphi(e_n)))$, donc $\varphi \in C^0$

• Montrons que φ^{-1} est continue :

Notons S la sphère unité de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

* $\boxed{\text{D'abord, on montre que } a := \inf_{x \in S}(N \circ \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{+*}}$:

$N \circ \varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$ est C^0 par composition, et S est compact (car fermé borné de $\mathbb{K}^n$),

d'où $a = \min_{x \in S}(N \circ \varphi(x))$

De plus, φ est injective et $\varphi(0) = 0$, d'où $N \circ \varphi(x) > 0$ pour tout $x \in S$. Donc $a > 0$

* $\boxed{\text{On montre qu'il existe } C > 0 \text{ tq } N(\varphi(x)) \geq C\|x\|_\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{K}^n}$:

Si $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, alors $\boxed{N(\varphi(x)) = \|x\|_\infty N\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right)\right)} \geq \|x\|_\infty a$ $\left(\text{car } \frac{x}{\|x\|_\infty} \in S\right)$

Si $x = 0_{\mathbb{K}^n}$, alors $N(\varphi(0)) = N(0) = 0 = \|0\|_\infty a$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{K}^n, a\|x\|_\infty \leq N(\varphi(x))$

* On montre enfin qu'il existe $C > 0$ tq $\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty \leq C\, N(u)$ pour tout $u \in E$:

$\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty \leq \frac{1}{a} N(\varphi(\varphi^{-1}(u))) = \frac{1}{a} N(u)$

Donc $\varphi^{-1} \in C^0$

Remarque : Une telle application φ existe si $\dim(E) = n$.
En effet, si $(a_1, \dots, a_n)$ est une base de E, alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \in E \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est linéaire bijective, donc sa réciproque aussi.

Preuve théorème 1 :

- $\boxed{\text{Commençons par montrer que les normes sur } E \text{ sont toutes équivalentes, c'est-à-dire que toute norme } N' \text{ sur } E \text{ est équivalente à } N}$:

$\boxed{\text{Reprenons l'application } \varphi \text{ du lemme 2}}$

$\boxed{\text{Par le lemme 2, } \begin{cases} \varphi^{-1} : (E, N) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \text{ est un homéomorphisme} \\ \varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E, N') \end{cases}}$

D'où $\varphi \circ \varphi^{-1} = id : (E, N) \to (E, N')$ est un homéomorphisme, et $id^{-1} = id : (E, N') \to (E, N)$ aussi

Ainsi, il existe $A, B > 0$ tq $\forall x \in E$, $N'(x) = N'(id(x)) \leq A\, N(x) = A\, N(id(x)) \leq AB\, N'(x)$

D'où $\frac{1}{A} N'(x) \leq N(x) \leq B\, N'(x)$. Donc $N \sim N'$, ainsi toutes les normes sont équivalentes.

- $\boxed{\text{Ainsi, pour mq } (E, N) \text{ est complet, il suffit de mq } (E, N') \text{ est complet pour une seule norme } N' \text{ qq sur } E}$

$\boxed{\text{Pour cela, il suffit d'établir une isométrie } (E, N') \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \text{ car } (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \text{ est complet}}$

C'est le cas de $\boxed{\varphi^{-1} : (E, N') \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \text{ où } N' : x \in E \mapsto \|\varphi^{-1}(x)\|_\infty}$ (c'est bien une norme puisque φ^{-1} est linéaire)

Donc (E, N') est complet

Preuve théorème 2 :

• "$\Longrightarrow$" (Remarque : le théorème 1 n'est pas nécessaire pour cette implication)

Comme $n = \dim(E) < +\infty$, alors il existe une application linéaire bijective $\varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, N)$, qui est un homéomorphisme par le lemme 2.

Ainsi $(E, N) \underset{\text{homéo}}{\simeq} (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ qui est localement compact (car $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\overline{B}(x, 1)$ est un voisinage compact de x),

donc (E, N) est localement compact.

• "$\Longleftarrow$" Supposons (E, N) localement compact.

* Alors $\overline{B} := \overline{B}(0, 1)$ est compacte par le lemme 1.

* $\overline{B}$ est alors précompact : il existe un ensemble fini $J \subset \overline{B}$ tel que $\overline{B} = \bigcup_{z \in J} B(z, \frac{1}{2})$

Soit $F := \mathrm{Vect}(J)$.

On a $\dim(F) \leq \mathrm{card}(J) < +\infty$, ainsi F est complet,

mais $F \subset E$, d'où F est fermé dans (E, N)

* Si on montre que $F = E$, alors c'est gagné. On a évidemment $F \subset E$.

Soit maintenant $x \in E$. Notons $d := \mathrm{dist}_N(x, F) = \inf_{y \in F} N(x - y)$. (Si $d = 0$, alors $x \in \overline{F} \overset{\text{(car F fermé)}}{=} F$)

Soit $k > 0$ tel que $kd < 1$

Comme k est positif, alors $\inf_{y \in F} (kN(x-y)) = kd < 1$, d'où il existe $y \in F$ tel que $\underbrace{kN(x-y)}_{(= N(k(x-y)))} \leq 1$,

d'où $k(x - y) \in \overline{B}$

Mais alors il existe $z \in \overset{\substack{F \\ \cup}}{J}$ tel que $k(x-y) \in B(z, \frac{1}{2})$, càd tq $N(k(x-y) - z) < \frac{1}{2}$

D'où $kN(x - (\underbrace{y + \frac{1}{k} z}_{\in F})) < \frac{1}{2}$, d'où $kd = \inf_{\tilde{y} \in F} kN(x - \tilde{y}) \leq kN(x - (y + \frac{1}{k} z)) < \frac{1}{2}$

Pour résumer : $\forall k > 0$ tel que $kd < 1$, on a $kd \leq \frac{1}{2}$

Donc $d = 0$ nécessairement (sinon, on aurait $\frac{1}{2d} d = \frac{1}{2} < 1$, alors on aurait $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, absurde !)

Donc $x \in \overline{F} = F$. D'où $E \subset F$.

Donc $E = F$, donc $\dim(E) = \dim(F) < +\infty$

Commentaires additionnels

- D'après le lemme 1 et le th 2, un e.v.n est de dim $<+\infty$ ssi la boule unité fermée est compacte. Ainsi, en dimension infinie, il existe des fermés bornés qui ne sont pas compacts.
- Voilà comment montrer que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet :

Skandalis pages 105, 109, 110

  * On montre que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.
  * Le produit de deux espaces métriques complets (X,d) et (X',d') est complet pour la distance produit
$$\begin{cases} d_p : ((x,x'),(y,y')) \in (X\times X')^2 \mapsto \left(d(x,y)^p + d'(x',y')^p\right)^{1/p} \\ d_\infty : (\ldots) \mapsto \max(d(x,y), d'(x',y')) \end{cases}$$
(distance induite par $\|\cdot\|_p$)
  * Ainsi $(\mathbb{R}^n, D_p)$ est complet ($p \in [1,+\infty]$ désormais). D'où $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ est complet
  * On vérifie aisément que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(x,y) \longmapsto x+iy$ est une isométrie, donc $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet, donc $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

- Voilà comment montrer que les compacts de $\mathbb{K}^n$ sont les fermés bornés
  * On montre qu'un produit fini de compacts est compact.
  * On montre que tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact
  * On montre enfin que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés. (En particulier, on utilise les 2 points précédents pour montrer "$\Leftarrow$")

  (Skandalis p80-81)
  * Comme $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, alors les compacts de $\mathbb{C}^n$ sont aussi les fermés bornés.

Résultats intermédiaires importants

8 • Une fct C^0 sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

9 • L'image d'un compact par une fct continue est compacte

10 • Les fermés dans un compact sont des compacts.

11 • Si (E,N) e.v.n et $(F,N_{|F})$ est complet avec $F\subset E$, alors F est fermé

12 • $\mathrm{dist}(x,A)=0 \iff x\in\bar{A}$

13 • $f\in\mathcal{L}(E,F)$ est C^0 ssi $\exists C>0, \forall x\in E, \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$