L160 – Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension *finie*. $n \in \mathbb{N}^*$

I – Rappels d'algèbre bilinéaire

Définition 1 : Un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique et définie positive.
Le cas échéant, on dit que $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Désormais, on suppose que $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, c'est-à-dire la forme quadratique associée à $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

Définition 2 : Soit $A \subset E$ un sous-ensemble. L'orthogonal de A est l'ensemble

$$A^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in A,\ \langle x, y \rangle = 0\}$$

Définition 3 : Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.
Le cas échéant, on note $x \perp y$.

Définition 4 : Une famille $(e_i)_{i \in I} \subset E$ est dite orthonormée si

$$\forall i, j \in I,\ \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Proposition 5 : [Gram-Schmidt]
E admet une base orthonormée, et il existe un algorithme permettant d'en construire une.

Proposition 6 : Soit $F \subset E$ sous-espace vectoriel. Alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F = (F^\perp)^\perp$

Définition 7 : Soit $F \subset E$ sous-espace vectoriel.

a) La projection orthogonale p_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$

b) La symétrie orthogonale s_F par rapport à F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$

Définition – Proposition 8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
L'adjoint de f, noté f^*, est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

Proposition 9 : [Propriétés autour de l'adjoint]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$ b) $(f^*)^* = f$

c) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ d) $f \in GL(E) \Longrightarrow \begin{cases} f^* \in GL(E) \\ (f^*)^{-1} = (f^{-1})^* \end{cases}$

e) $\operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Im}(f)^\perp$ et $\operatorname{Im}(f^*) = \operatorname{Ker}(f)^\perp$

f) $\operatorname{rg}(f^*) = \operatorname{rg}(f)$

g) Si $F \subset E$ est un s.e.v stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.

Proposition 10 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base orthonormée de E.
Alors $\operatorname{Mat}_B(f^*) = {}^t(\operatorname{Mat}_B(f))$

Remarque 11 : Le résultat ci-dessus ainsi que la correspondance bijective entre application linéaire et matrice (en dimension finie) permet de donner aux items 8, 9 et 10 des énoncés analogues pour les matrices, notamment en remplaçant $\begin{cases} f \text{ par } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ E \text{ par } \mathbb{R}^n \\ f^* \text{ par } {}^tA \end{cases}$

C'est pourquoi nous ne nous priverons pas de passer d'un point de vue à l'autre sans scrupule.

II- Groupe orthogonal

Définition 12 :

a) Une isométrie de E est un automorphisme f de E vérifiant $f^* = f^{-1}$

b) Une matrice orthogonale est une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = A^{-1}$.

Déf-Prop 13 : a) $\mathcal{O}(E)$ désigne l'ensemble des isométries de E. On a $\mathcal{O}(E) < GL(E)$

b) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ______ matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. On a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) < GL_n(\mathbb{R})$

Proposition 14 : Soit $f \in GL(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $f \in \mathcal{O}(E)$

b) $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

c) $\forall x, y \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$ (f préserve les distances)

Exemple 15 : a) $id_E \in \mathcal{O}(E)$

b) Les projections orthogonales autres que l'identité ne sont pas des isométries

c) Soit $F \subset E$ un s.e.v. Alors $s_F \in \mathcal{O}(E)$.
Si $\operatorname{codim}(F) = 1$, on dit que s_F est une réflexion d'hyperplan F
Si $\operatorname{codim}(F) = 2$, on dit que s_F est un retournement d'axe F.

d) Les matrices de rotation $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales

Proposition 16 : Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors :

a) $\det(u) \in \{\pm 1\}$, et $Sp(u) \subset \{\pm 1\}$

b) u envoie les bases orthonormées sur les bases orthonormées

c) Si $F \subset E$ est un s.e.v stable par u, alors $F^\perp$ aussi.

Rappel 17 : Soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E, où $p \leq n$.
Alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geq n - p$

Proposition 18 : [Générateurs de $\mathcal{O}(E)$, Dev 1]

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors u peut s'écrire comme un produit de $rg(u - id_E)$ réflexions, mais pas moins.

Théorème 19 : [Réduction des isométries]

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe une base orthonormée B de E telle que $Mat_B(u)$ est de la forme :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \boxed{R(\theta_1)} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \boxed{R(\theta_r)} & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

où $\begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, s\}, & \varepsilon_j \in \{\pm 1\} \\ \forall i \in \{1, \dots, r\}, & \theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Remarque 20 : Ce résultat permet notamment de classifier les isométries en une dimension donnée.

Par exemple, en dimension 2, il y a 4 classes d'isométries différentes. On les illustre en annexe.

III- Endomorphismes symétriques

Définition 21 : a) Un endomorphisme f de E est dit symétrique si $f^* = f$

b) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$.
On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$

Remarque 22 : D'après g) de l'item 9, on a :
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et si $F \subset E$ est un s.e.v stable par f alors $F^\perp$ aussi

Théorème 23 : [Réduction des endomorphismes symétriques]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors f est $\mathbb{R}$-diagonalisable en base orthonormée de vecteurs propres.

Corollaire 24 : [Théorème spectral]

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = {}^tPDP$.

Définition 25 : $A \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. définie positive) si la forme quadratique $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$ est positive (resp. définie positive)

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices positives

$S_n^{++}(\mathbb{R})$ ——— définies positives

Proposition 26 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :

a) $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in S_p(A), \ \lambda \geq 0$

b) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall \lambda \in S_p(A), \ \lambda > 0$

Proposition 27 : $S_n^{++}(\mathbb{R}) = S_n^+(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

Proposition 28 : $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$

Remarque 29 : Ce n'est pas le cas de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. (Prendre $A_k := \begin{pmatrix} 1/k & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$)

Oubli 30 : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Proposition 31 : Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors $\exists ! \, S \in S_n^+(\mathbb{R}), \ S^2 = A$

Proposition 32 : [Décomposition polaire]

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $(\mathcal{O}, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tels que

$$A = \mathcal{O}S$$

De plus, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{O}$ et S sont uniques.

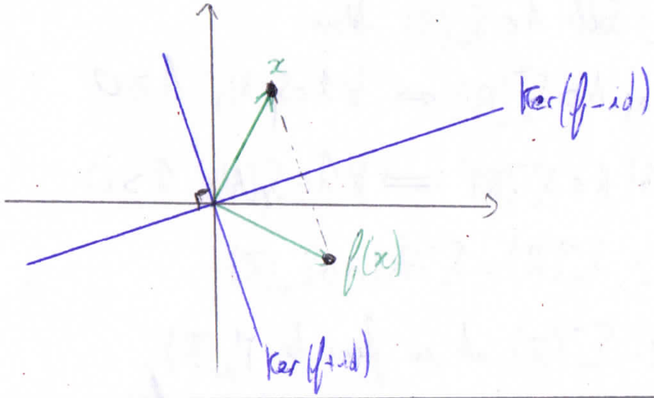
Dev 2

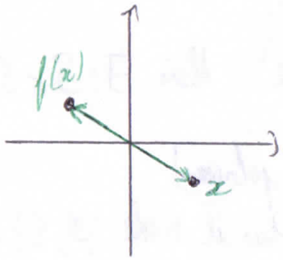
Application 33 : $(\mathcal{O}, S) \in M_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{O}S \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

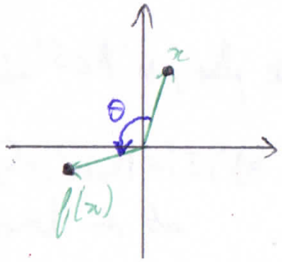
Annexe : Classification des isométries en dimension 2

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ où $\dim(E) = 2$. On peut supposer $E = \mathbb{R}^2$

<table>
<tr><th>Il existe une BON dans laquelle la matrice de f est de la forme :</th><th>Ainsi, f est :</th></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</td><td>L'identité</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$</td><td>Une réflexion (d'axe $\ker(f - id)$, parallèlement à $\ker(f + id)$)


</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$</td><td>Le retournement d'axe $\{0\}$ (donc $f = -id_E$)


</td></tr>
<tr><td>$R(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$</td><td>La rotation d'angle θ


</td></tr>
</table>