Théorèmes de Sylow
(version mal rédigée)

<u>Thm</u> : Soit G un gpe fini. p premier tq $|G| = p^\alpha m$ avec $\alpha \geq 0$ et $p \nmid m$. On note $\$$ l'ensemble des p-sylow de G.

alors : (i) $\$ \neq \emptyset$ (ii) Deux p-sylow sont conjugués

(iii) tout p-sg est contenu dans un p-Sylow

(iv) $|\$| \equiv 1 [p]$ (v) $|\$| \mid m$

(i) Par récurrence sur $|G|$. Si $|G| = 1$ ou p c'est bon.

- si $\exists H < G$, $p \nmid [G:H]$ alors $p^\alpha \mid |H|$ et par récurrence H possède un p-Sylow, qui est un p-Sylow de G.
- si $\forall H < G$, $p \mid [G:H]$, On fait agir $G \curvearrowright G$ par conjugaison. $x \in Z(G) \iff \mathrm{Stab}(x) = G$

ainsi $|Z(G)| \equiv |G| [p] \equiv 0 [p]$

donc $p \mid |Z(G)|$ et par Cauchy $\exists h \in Z(G)$, d'ordre p.

Le groupe $G/_{\langle h \rangle}$ est de cardinal $< |G|$, il possède un p-Sylow K, et si $\pi : G \to G/_{\langle h \rangle}$, $L = \pi^{-1}(K) \in \$ \neq \emptyset$.

(ii) Soit $S \in \$$. $G \curvearrowright \$$ (conj), et $\mathrm{Stab}\, S \supset S$ donc $p \nmid |O_S|$. Soit H un p-sg de G. $H \curvearrowright O_S$ (conj).

On peut donc écrire $|O_S| = \sum |\mathcal{U}_Q|$ des H-orbites

et il y a un $Q \in O_S$ tq : $p \nmid |\mathcal{U}_Q|$ mais $\mathcal{U}_Q \mid |H|$

donc $|\mathcal{U}_Q| = 1$ ie $\forall h \in H$, $hQh^{-1} = Q \Rightarrow HQ \leq G$

et $Q \triangleleft HQ$ et $HQ/_Q \simeq H/_{H \cap Q}$ donc $|HQ| = \dfrac{|H|\,|Q|}{|H \cap Q|}$

et $|HQ|$ est une puissance de p, $Q \subset HQ \Rightarrow Q = HQ$ donc $H \subset Q$.

(iii) en (ii), Q est un conjugué de S donc tout p-Sylow est contenu dans un conjugué de S d'où le résultat.

(iv) $S \curvearrowright \$$ (conj) $|\$| = \sum |O_Q|$ et $|O_Q| \mid |S| = p^\alpha$

Soit $Q \in \$$ tq : $\forall s \in S$, $sQs^{-1} = Q$. Alors $SQ \leq G$ et comme précédemment, $S = Q$. Ainsi $|\$| \equiv 1 \bmod p$

(v) $G \curvearrowright \mathbb{S}$ conj. $\quad |\mathbb{S}| \cdot |\mathrm{Stab}\, S| = |G|$ et $S \subset \mathrm{Stab}\, S$

$\Rightarrow \quad |\mathbb{S}| \mid m$.