Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

191

I - Autour des polytopes

Soit $n \geq 3$. Posons $\omega_n := e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

A - Isométries conservant un polygone régulier : groupes diédraux

__Def 1__ : Le polygone régulier à n côtés est le polygone convexe P_n du plan dont les sommets sont, dans l'ordre, les points d'affixes $1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$.

__Def/Prop 2__ : L'ensemble des isométries du plan conservant P_n est un groupe, appelé *groupe diédral d'ordre $2\times n$*, noté D_{2n}. Il est engendré par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ centrée à l'origine (correspondant à $z \longmapsto \omega_n z$ en termes d'affixes) et la symétrie d'axe (Ox) (correspondant à la conjugaison en terme d'affixes).

__Prop 3__ : Soit G un groupe d'ordre $2n$. Si G est engendré par deux éléments r et s vérifiant $r^n = s^2 = (rs)^2 = 1$, alors $G \simeq D_{2n}$.

[Rb] 94 __Thm 4__ : L'ensemble des isométries du plan conservant un triangle équilatéral est un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

B - Isométries conservant un solide de Platon

__Def 5__ : Un solide de Platon est un polyèdre convexe et régulier, i.e. ses faces sont des polygones réguliers identiques, et de chaque sommet part un même nombre d'arêtes.

__Thm 6__ : Les solides de Platon sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

[Rb] 82 __Prop 7__ : Soit $\mathcal{C}$ un cube. L'ensemble des isométries de l'espace conservant $\mathcal{C}$ est un groupe, noté $Is(\mathcal{C})$. On note $Is^+(\mathcal{C})$ le sous-groupe de $\mathcal{C}$ formé de rotations.

FIGURE 1

__Thm 8__ : $Is^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ **DEV 1** [Rb] 85

__Thm 9__ : Notons $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{I}$ le tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre. Pour chacun d'entre eux, $Is(\cdot) \simeq Is^+(\cdot) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et [S] 422 433 432

	$\mathcal{T}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{I}$
$Is^+ \simeq$	$\mathcal{A}_4$	$\mathfrak{S}_4$	$\mathcal{A}_5$	$\mathcal{A}_5$

__Rq 10__ : On peut déduire géométriquement $Is^+(\mathcal{T})$ et les 2-Sylow de $Is^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$ (FIGURE 2).

C - Constructibilité des polygones régulier à la règle non graduée et au compas

__Def 11__ : On dit que $z \in \mathbb{C}$ est constructible si on peut tracer l'image de z dans le plan uniquement avec un compas et une règle non graduée.
On dit P_n est constructible si ω_n l'est. FIGURE 3

__Thm 12__ (de Gauss-Wantzel) : P_n est constructible si, et seulement si n est de la forme $n = 2^m p_1 \cdots p_r$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $p_1 \cdots p_r$ des nombres premiers de Fermat, i.e. 3, 5, 17, 257, 65 537.

II - Étude des coniques d'un plan affine euclidien

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. On fixe un repère orthonormé.

A - Définition algébrique, classification

__Def 13__ : Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $(d,e,f) \in \mathbb{R}^3$. On pose $q : (x,y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2$ et $\ell : (x,y) \longmapsto dx + ey$. Une conique est : [Rb] 493-494

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathcal{P} \mid q(x,y) + \ell(x,y) + f = 0\}$$

On définit $Q : (x,y,z) \longmapsto q(x,y) + \ell(x,y)z + fz^2$.

[Au] 228-231 Ex 14 : ▸ $\{(x,y)\in P \mid (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2\} = \mathcal{C}ercle\left(\binom{\alpha}{\beta}, r\right)$.

▸ $\{(x,y)\in P \mid \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=r^2\}$ est une ellipse.

▸ $\{(x,y)\in P \mid y=2px^2\}$ est une parabole

Thm 15 : Classification : ANNEXE 1

Prop 16 : Soit $\Delta=b^2-4ac=\mathrm{disc}(q)$ avec les notations de Def 13.

- Si $\Delta<0$, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou vide,
- Si $\Delta=0$, alors $\mathcal{C}$ est une parabole, deux droites parallèles ou vide,
- Si $\Delta>0$, alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole, deux droites sécantes ou vide.

B - Définitions géométriques

FIGURE 2

[Rb] 494 Prop 17 : Les ellipses, paraboles, hyperboles, points et couples de droites sécantes sont obtenues comme intersection d'un cône et d'un plan.

[Rb] 505-506 Thm 18 : Soient $\mathcal{D}$ une droite de P, $F\in P\setminus\mathcal{D}$ et $e>0$. L'ensemble $\mathcal{C}=\{M\in P \mid d(M,F)=e\,d(M,\mathcal{D})\}$ est une conique, on appelle $\mathcal{D}$ la directrice, F son foyer et e son excentricité. Plus précisément, $\mathcal{C}$ est soit vide, soit une ellipse si $e<1$, une parabole si $e=1$, une hyperbole si $e>1$. FIGURE 3

[Rb] 506 Rq 19 : On peut déterminer une équation dans un repère bien choisi, comme détaillé dans FIGURE 3.

~~Rq 20 : La directrice est un axe de symétrie.~~

[Au] 233-234 Thm 21 : ▸ Si $\mathcal{C}$ est une ellipse, alors il existe F et F' dans P (appelés foyers de $\mathcal{C}$) et $a>0$ (appelé demi-grand axe de $\mathcal{C}$) tels que

$$\mathcal{C}=\{M\in P \mid MF+MF'=2a\}$$

▸ Si $\mathcal{C}$ est une hyperbole, alors il existe F et F' dans P (appelés foyers de $\mathcal{C}$) et $a>0$ (appelé demi-grand axe de $\mathcal{C}$) tels que :

$$\mathcal{C}=\{M\in P \mid |MF-MF'|=2a\}.$$

FIGURE 1

[Ei] 52 Thm 22 : Soient A, B, C, D et E cinq points de P distincts.

1▸ Il existe une conique passant par A, B, C, D et E.

2▸ Elle est unique ssi 4 points ne sont pas alignés. DEV 2

3▸ Elle est non dégénérée ssi 3 points ne sont pas alignés

ANNEXE 1 : Classification des coniques

Type	Signature de q	Signature de Q	Éq. réduite
Ellipse	(2,0) / (0,2)	(2,1) / (1,2)	$x^2+y^2=1$
Parabole	(1,0) / (0,1)	(2,1) / (1,2)	$x^2+y=1$
Hyperbole	(1,1)	(2,1) / (1,2)	$x^2-y^2=1$
	(1,1)	(1,1)	$x^2-y^2=0$
	(1,0) / (0,1)	(1,1)	$x^2=1$
	(1,0) / (0,1)	(1,0) / (0,1)	$x^2=0$
$\{M\}$	(2,0) / (0,2)	(2,0) / (0,2)	$x^2+y^2=0$
$\emptyset$	(2,0) / (0,2)	(3,0) / (0,3)	$x^2+y^2=-1$
$\emptyset$	(1,0) / (0,1)	(2,0) / (0,2)	$x^2=-1$

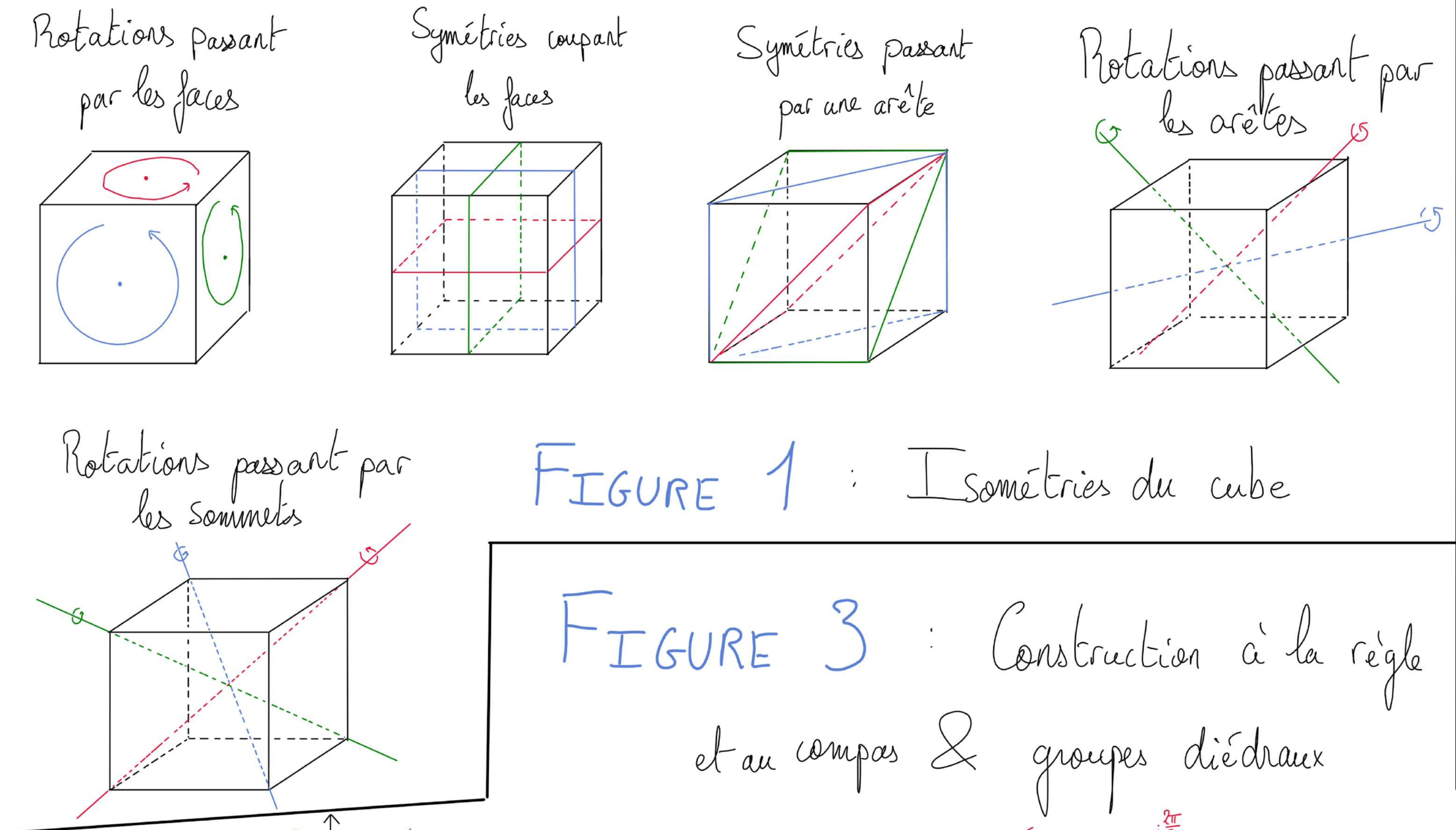


FIGURE 1 : Isométries du cube

FIGURE 2

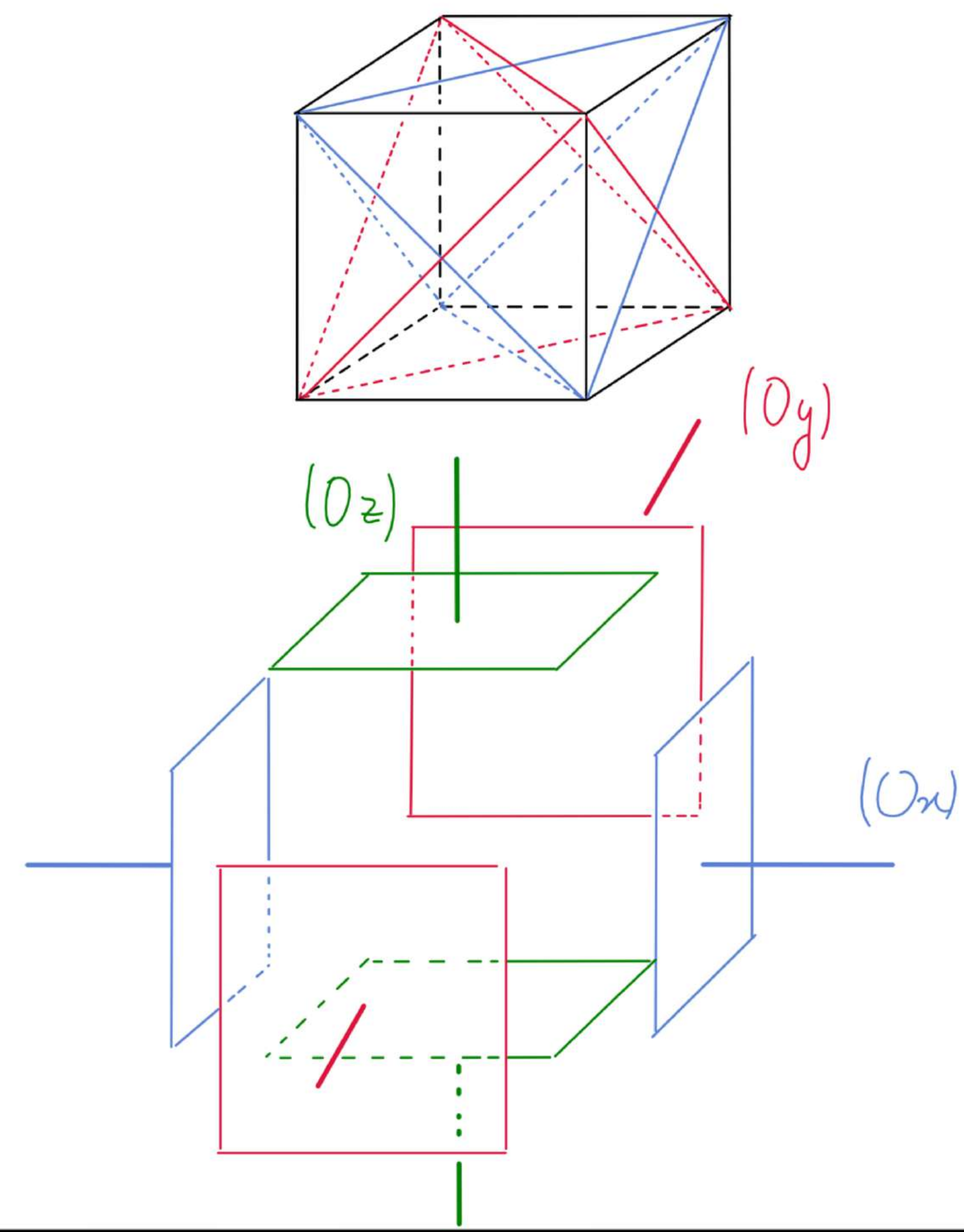


FIGURE 3 : Construction à la règle et au compas & groupes diédraux

Figure 4 : Les différentes coniques

$\mathcal{E} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$

$\mathcal{H} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$

$\mathcal{DS} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid y^2 = \frac{b}{a}\, x \right\}$

$\mathcal{B} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid y = 2p x^2 \right\}$

$\mathcal{DP} = \left\{ (x,y) \in \mathcal{P} \mid x^2 = d \right\}.$

Figure 5 : Sections du cône

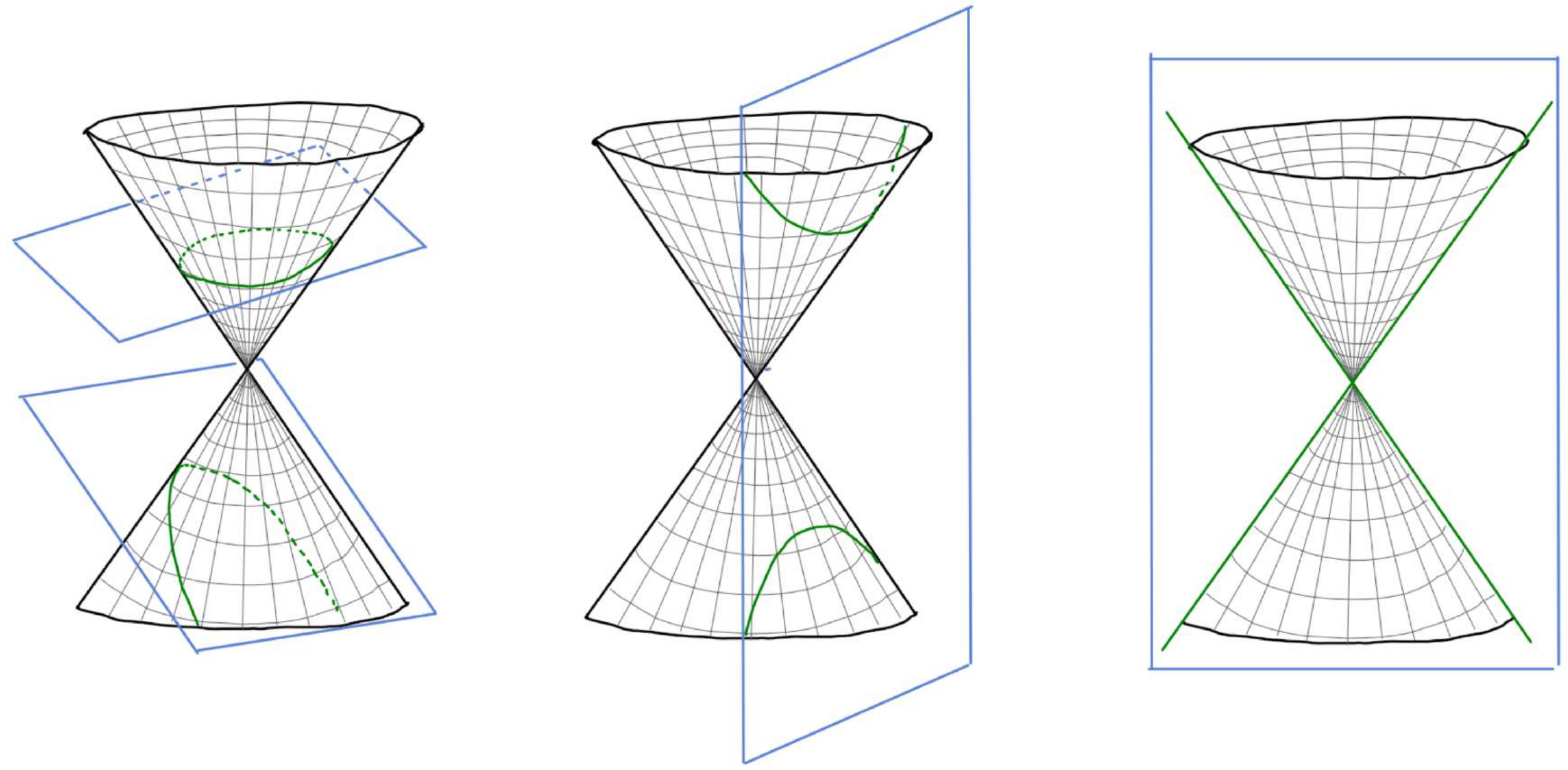
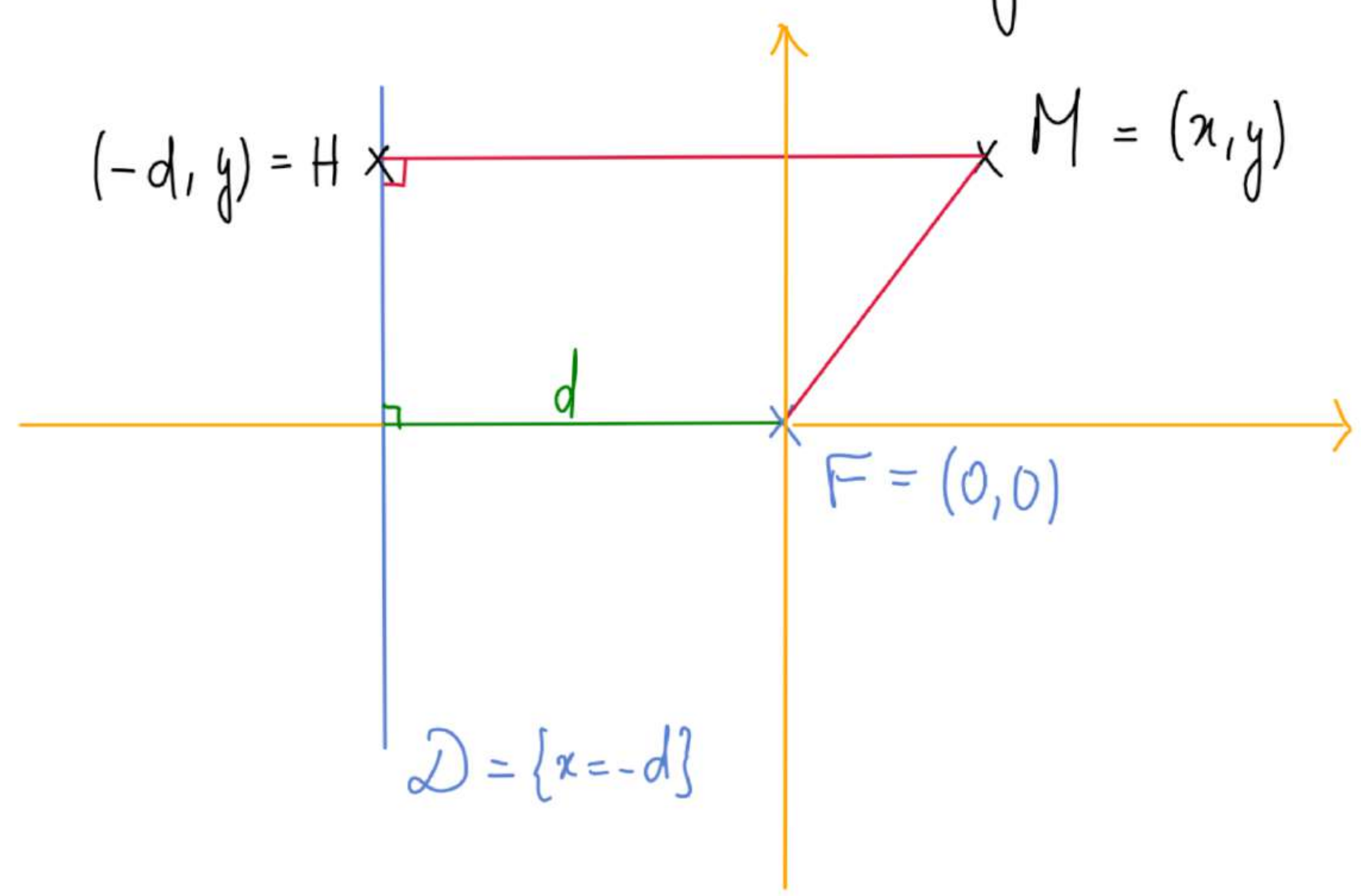


Figure 6 : Foyer - directrice



$$M \in \mathcal{C} \iff MF = e\,MH \iff x^2 + y^2 = e^2 (x+d)^2$$
$$\iff (1-e^2)\, x^2 + y^2 - 2e\,dx - e^2 d^2 = 0$$

Références

[Rb]
[Au]
[Ei]
[S]