181 Barycentres d'un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Soient E un espace euclidien de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathcal{E}$ un espace affine sur E.

I - Barycentre d'un ensemble de points, coordonnées barycentriques

A - Barycentres : définition, recherche, points remarquables

[S] 106 Prop/Def 1 : Soit $((A_1,\lambda_1),\dots,(A_p,\lambda_p)) \in (\mathcal{E}\times\mathbb{R})^p$, posons $\lambda = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k$ et $\phi : M \in \mathcal{E} \longmapsto \sum_{k=1}^{p}\lambda_k \overrightarrow{MA_k}$ (fonction de LEIBNIZ).

- Si $\lambda = 0$, alors ϕ est constante,
- Si $\lambda \neq 0$, alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que $\phi(G) = \vec{0}$.
  On le note $G = \mathrm{Bar}(\{(A_1,\lambda_1),\dots,(A_p,\lambda_p)\})$, et on l'appelle barycentre du système de points pondérés $\{(A_1,\lambda_1),\dots,(A_p,\lambda_p)\}$. Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_p \neq 0$, on l'appelle isobarycentre de $\{(A_1,\lambda_1),\dots,(A_p,\lambda_p)\}$, que l'on abrégera $\mathrm{Bar}(A_1,\dots,A_p)$ en vertu de la Prop 2 suivante.

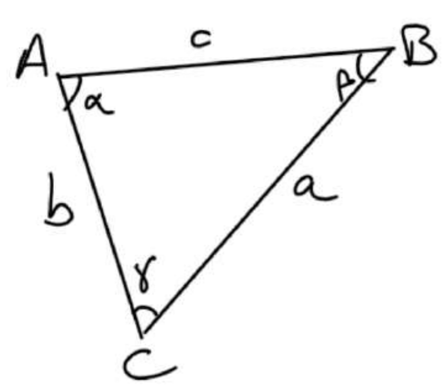
[S] 106 Prop 2 : $\forall \mu \in K^*$, $\mathrm{Bar}(\{(A_k,\lambda_k)\}_{1\leq k\leq p}) = \mathrm{Bar}(\{(A_k,\mu\lambda_k)\}_{1\leq k\leq p})$

Dans la suite $\{(A_k,\lambda_k)\}_{1\leq k\leq p}$ est un système de points pondérés tel que $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k = 1$.

[S] 106 Prop 3 : Soit $r \in [\![1,p]\!]$ tel que $\lambda_1+\dots+\lambda_r \neq 0$ et $\lambda_{r+1}+\dots+\lambda_p \neq 0$. Posons $G_1 = \mathrm{Bar}(\{(A_k,\lambda_k)\}_{1\leq k\leq r})$ et $G_2 = \mathrm{Bar}(\{(A_k,\lambda_k)\}_{r+1\leq k\leq p})$. On a :

$$\mathrm{Bar}(\{(A_k,\lambda_k)\}_{1\leq k\leq p}) = \mathrm{Bar}(\{(G_1,\lambda_1+\dots+\lambda_r),(G_2,\lambda_{r+1}+\dots+\lambda_p)\})$$

Ex 4 :
- Le milieu d'un segment $[A,B]$ est l'isobarycentre de $\{A,B\}$.
- Le centre de gravité d'un polygône est l'isobarycentre de ses sommets.
- FIGURE 1 : détermination d'un barycentre par associativité.
- [Ei] 39-43 Soit ABC le triangle non aplati ci-contre.



  - Centre du cercle circonscrit : $\mathrm{Bar}(\{(A,\sin(2\alpha)),(B,\sin(2\beta)),(C,\sin(2\gamma))\})$.
  - Centre du cercle inscrit : $\mathrm{Bar}(\{(A,a),(B,b),(C,c)\})$
  - Orthocentre : $\mathrm{Bar}(\{(A,\tan(\alpha)),(B,\tan(\beta)),(C,\tan(\gamma))\})$.

Rq 5 : $[A,B] = \{\lambda A + (1-\lambda)B : 0 \leq \lambda \leq 1\} = \{\mathrm{Bar}(\{(A,\lambda),(B,1-\lambda)\}) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$

Prop 6 : Soient $z_1,\dots,z_n$ des complexes qui sont les affixes de point $M_1,\dots,M_p$. Notons P_0 le polygône de sommets $M_1,\dots,M_p$, et pour $n\in\mathbb{N}$, P_n est le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_{n-1}. La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\mathrm{Bar}(M_1,\dots,M_p)$. FIGURE 2 **DEV 1**

B - Barycentres et structure affine, coordonnées barycentriques

Def 7 : On dit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si $\mathcal{F} = \emptyset$ ou s'il existe un sev. F de E et $A \in \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F} = A + F$ [S] 105

Ex 8 : $\mathcal{P} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=1\} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

Prop 9 : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si, et seulement si $\mathcal{F}$ est stable par barycentres. [S] 105

Prop 10 : Une intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine. [S] ~105

Def 11 : Le sous-espace affine engendré par $X \subseteq \mathcal{E}$ est $\mathrm{Aff}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{ sea de } \mathcal{E} \\ X\subseteq\mathcal{F}}} \mathcal{F}$. [S] 105

Prop 12 : Soit $X \subseteq \mathcal{E}$ non vide. L'espace $\mathrm{Aff}(X)$ est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés de X. [S] 108

REPÈRES AFFINES

Def 13 : On dit que $(A_1,\dots,A_p)$ est affinement génératrice de $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E} = \mathrm{Aff}(\{A_1,\dots,A_p\})$. [S] ~105

Ex 14 : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est affinement génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Def 15 :
- On dit que $(A_1,\dots,A_p)$ est affinement libre s'il existe $i_0 \in [\![1,p]\!]$ tel que $(\overrightarrow{A_{i_0}A_j})_{\substack{1\leq j\leq p\\ j\neq i_0}}$ est une famille libre de E. Sinon, elle est dite affinement liée. [S] ~105
- On dit que $(A_1,\dots,A_p)$ est une base affine de $\mathcal{E}$ si elle est affinement libre et génératrice de $\mathcal{E}$.

Ex 16 : La famille de Ex 14 est un repère affine de $\mathbb{R}^3$.

Rq 17 : Un repère affine de $\mathcal{E}$ contient $n+1$ points.

COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

[S] 109 **Thm/Def 18** : Soient $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et $M \in \mathcal{E}$. Il existe un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$ et $M = \mathrm{Bar}(\{(A_k, \lambda_k)\}_{0 \leq k \leq n})$, que l'on appelle coordonnées barycentriques de M dans $\mathcal{R}$.

[Ei] ~41 **Ex 19** : Les coordonnées barycentrique du centre de gravité d'un triangle ABC dans le repère affine (A,B,C) du plan, sont $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

[Ei] 12 **Prop 20** : Soit ABC un triangle non aplati, soit M à l'intérieur du triangle. Les coordonnées barycentriques de M dans (A,B,C) sont $\frac{1}{\mathcal{A}(ABC)}\left(\mathcal{A}(MBC), \mathcal{A}(MCA), \mathcal{A}(MAB)\right)$ où $\mathcal{A}(T)$ désigne l'aire orientée de T.

Thm 21 (de Ménélaüs) : Soient A, B et C trois points du plan non alignés, $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ et $F \in (AB)$ distincts de A, B et C. Les D, E et F sont alignés si, et seulement si $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$, où $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$ est l'unique scalaire tel que $\overrightarrow{DB} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \overrightarrow{DC}$.

Prop 22 : Soient $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et $(B_0, \dots, B_n) \in \mathcal{E}^n$. On note $(\lambda_0^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)})$ les coordonnées barycentriques de B_k dans $\mathcal{R}$. Alors $(B_0, \dots, B_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si, et seulement si $\begin{vmatrix} \lambda_0^{(0)} & \cdots & \lambda_0^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n^{(0)} & \cdots & \lambda_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$.

[S] 110 **Prop 23** : Soient $\mathcal{R}' = (B_0, \dots, B_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_0, \dots, \mu_n)$ respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ avec les notations de Prop 22. On a la relation ${}^t(\lambda_0 \cdots \lambda_n) = \left(\lambda_i^{(j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} {}^t(\mu_0 \cdots \mu_n)$.

[Ei] 52 **Thm 24** : Soient A, B, C, D, E cinq points du plan $\mathcal{E}$. Il existe une conique $\mathcal{C}$ passant par A, B, C, D et E. De plus : **DEV 2**

- Si 4 points quelconques parmi ces points ne sont pas alignés, alors $\mathcal{C}$ est unique.
- Si 3 points quelconques parmi ces points ne sont pas alignés, alors $\mathcal{C}$ est non dégénérée.

II – La convexité et ses applications

A – Ensembles convexes, caractérisations – lien avec les fonctions convexes

Soit $(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{E}^p$. Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$.

Def 25 : Une combinaison convexe de $A_1, \dots, A_p$ est un barycentre $\mathrm{Bar}(\{(A_k, \lambda_k)\}_{k=1}^{p})$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in [0,1]^p$ et $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$. [S] 120

Def 26 : On dit que $\mathcal{C}$ est convexe s'il est stable par combinaison convexe. [S] ~121

Rq 27 : D'après Prop 2, cela revient à dire que $\mathcal{C}$ contient ses barycentres à poids positifs. [S] ~121

Prop 28 : $\mathcal{C}$ est convexe si, et seulement si $\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2$, $[A,B] \subseteq \mathcal{C}$.

Ex 29 : [S] ±121
- Un segment est convexe.
- Un sous-espace affine est convexe.
- Une boule d'un espace vectoriel normé est convexe.
- Un triangle est convexe.

Def 30 : On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe si : [S] 133
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Def 31 : On appelle épigraphe de f la partie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par :
$$\{(y,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$
FIGURE 3

Prop 32 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si son épigraphe l'est.

B – Enveloppe convexe : définition, caractérisation, recherche – points extrémaux

Prop 33 : Une intersection quelconque de convexes est convexe. [S] 122

Def 34 : L'enveloppe convexe de $X \subseteq \mathcal{E}$ est le plus petit convexe de $\mathcal{E}$ contenant X : [S] 122
$$\mathrm{Conv}(X) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ convexe} \\ X \subseteq \mathcal{C}}} \mathcal{C}$$

Ex 35 : Soient A, B et C trois points de $\mathcal{E}$.
- L'enveloppe convexe de $\{A, B\}$ est $[AB]$.
- L'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ est le triangle ABC.

Ex 36 : Un polygône régulier à p côtés est une image par une isométrie affine du plan de l'enveloppe convexe des points d'affixes $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$, $1 \leq k \leq p$.

[S] 122 Prop 37 : Soit $X \subseteq \mathcal{E}$ non vide. L'enveloppe convexe de X est l'ensemble des combinaisons convexes de familles finies de points de X.

[S] 124 Thm 38 (de CARATHÉODORY) : Soit $X \subseteq \mathcal{E}$ non vide. L'enveloppe convexe de X est l'ensemble des combinaisons convexes de familles d'au plus $n+1$ points de X.

[S] 125 Cor 39 : L'enveloppe convexe d'une partie compacte est compacte.

[FGN] 229 Thm 40 (de GAUSS-LUCAS) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On note $M_1, \dots, M_p$ les points du plan d'affixes les racines de P, et $M_1', \dots, M_{p-1}'$ les points du plan d'affixes les racines de P'. Alors $\{M_1', \dots, M_{p-1}'\} \subseteq \mathrm{Conv}(\{M_1, \dots, M_p\})$. FIGURE 4

[FGN] 229 Appli 41 : 7 est le plus grand entier k tel que les racines non nulles de $(X+1)^k - X - 1$ sont de module 1.

Algo 42 (de GRAHAM) : Il permet de trouver l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du plan. FIGURE 5

Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ un convexe non vide.

[S] 131 Def 43 : Un *point extrémal* de $\mathcal{C}$ est un point $M \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2, \quad M \in [A,B] \Rightarrow A = M = B.$$

Ex 44 :
- Les points extrémaux d'un polygône convexe sont ses sommets
- Les points extrémaux de la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ avec $\|\cdot\|$ une norme quelconque sont les points de la sphère unité.

[S] 132 Prop 45 : Un convexe privé de ses points extrémaux reste convexe.

Thm 46 (de KREIN-MILMAN) [admis] : Un convexe de $\mathcal{E}$ est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. [S] 133

Prop 47 : Soient $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ convexe et $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie affine. Si $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, alors φ permute les points extrémaux de $\mathcal{C}$.

Appli 48 : Les isométries affines préservant un cube sont exactement les isométries affines préservant l'ensemble de ses sommets. [Rb] 85

RÉFÉRENCES

[S]

[Ei]

[FGN]

[Rb]

FIGURE 1 : Recherche d'un barycentre par associativité

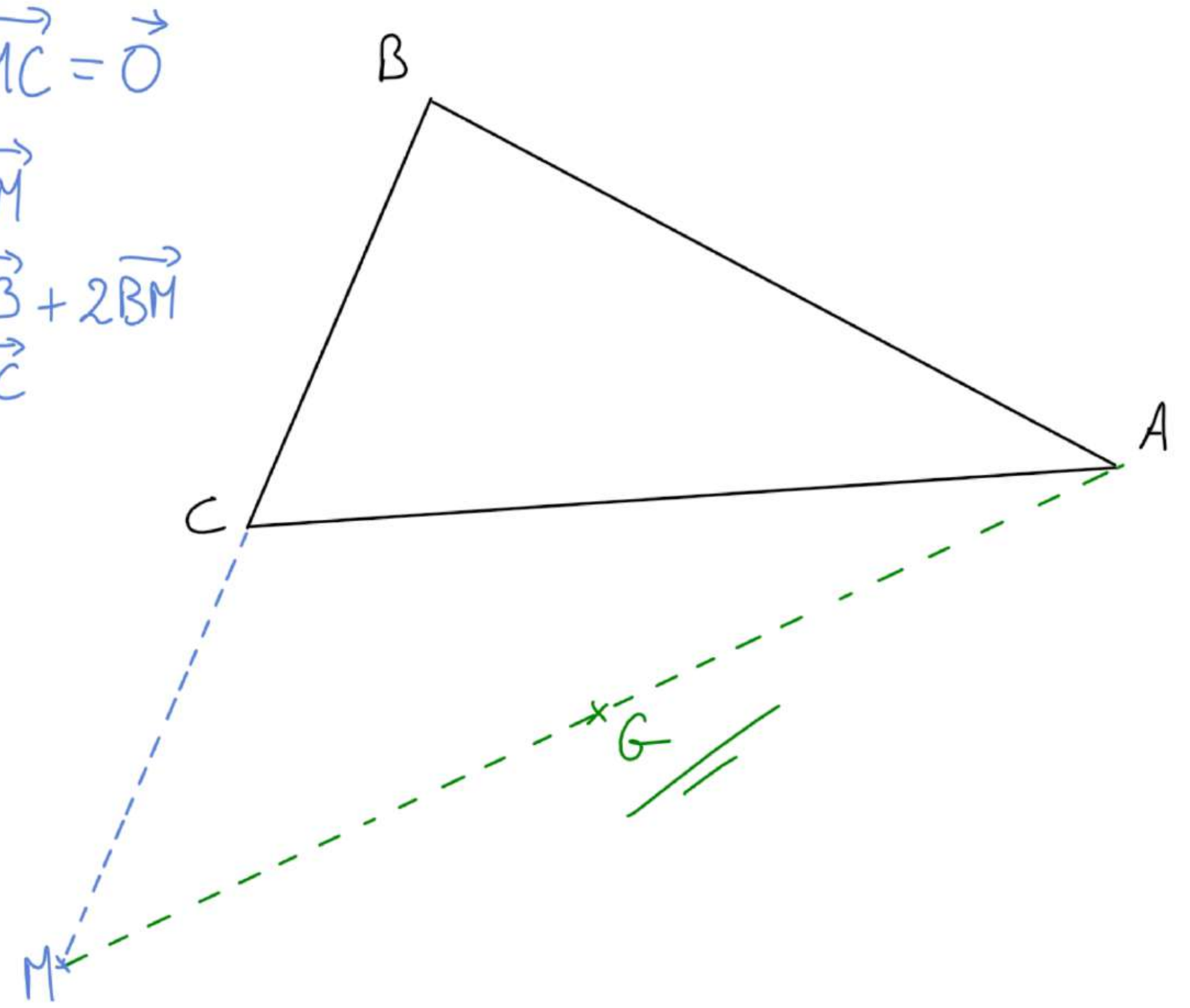
Cherchons $G = \mathrm{Bar}(\{(A,1), (B,-1), (C,2)\})$ sur la figure suivante.

$(-1)\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

donc $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM}$

$= 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BM}$

donc $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$



$G = \mathrm{Bar}(\{(A,1), (M,-1+2)\})$

donc $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM})$

donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

FIGURE 3 : Épigraphes et convexité

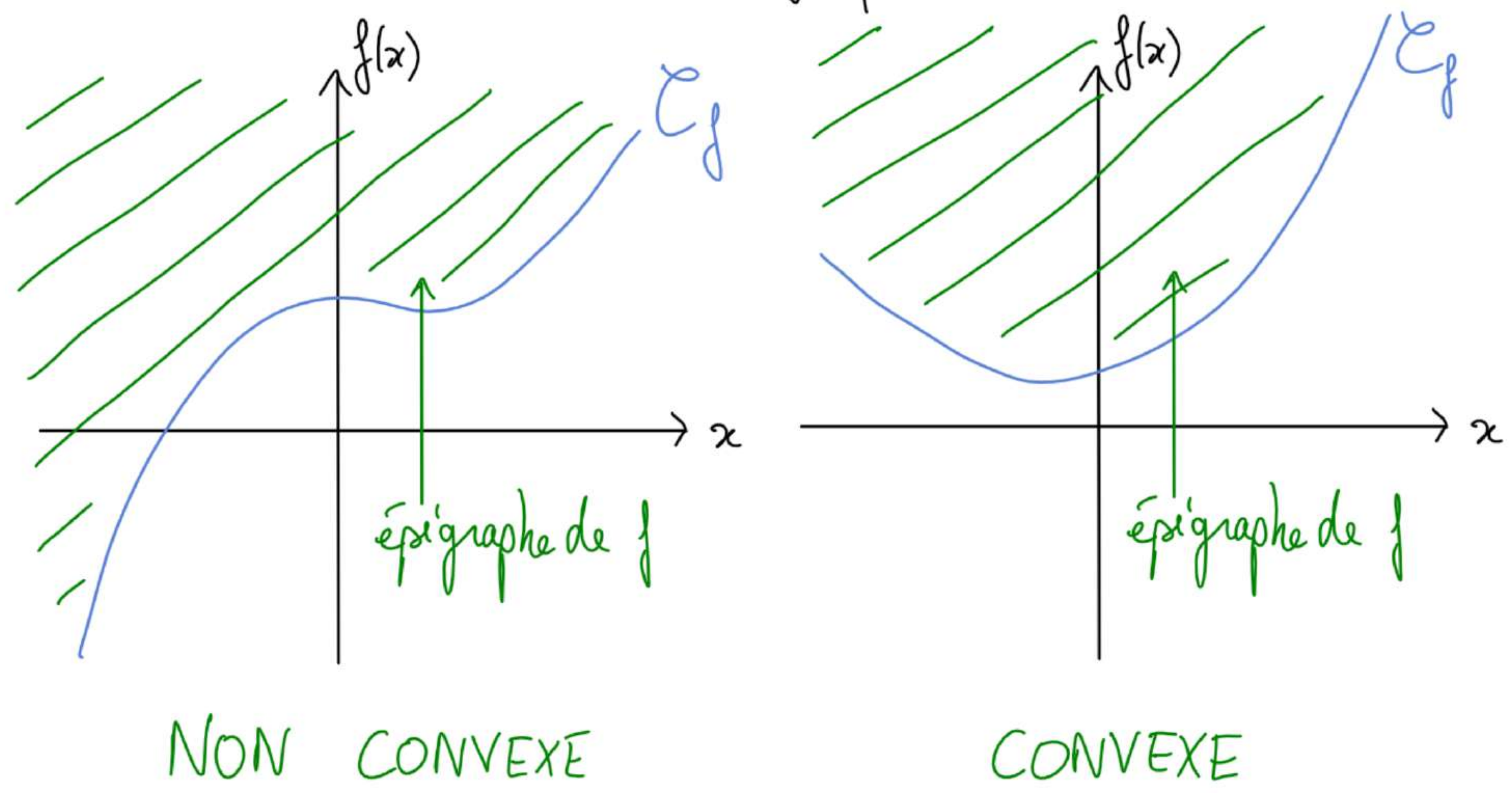


FIGURE 4 : Théorème de Gauss-Lucas

$P = X^4 + 3X^2 + 6X + 10 = (X-(1+i))(X-(1-i))(X-(1+2i))(X-(1-2i))$

$P' = 4X^3 + 6X + 6 = \dots$

$P'' = 12X^2 - 6 = 12(X - \frac{1}{\sqrt{2}})(X + \frac{1}{\sqrt{2}})$

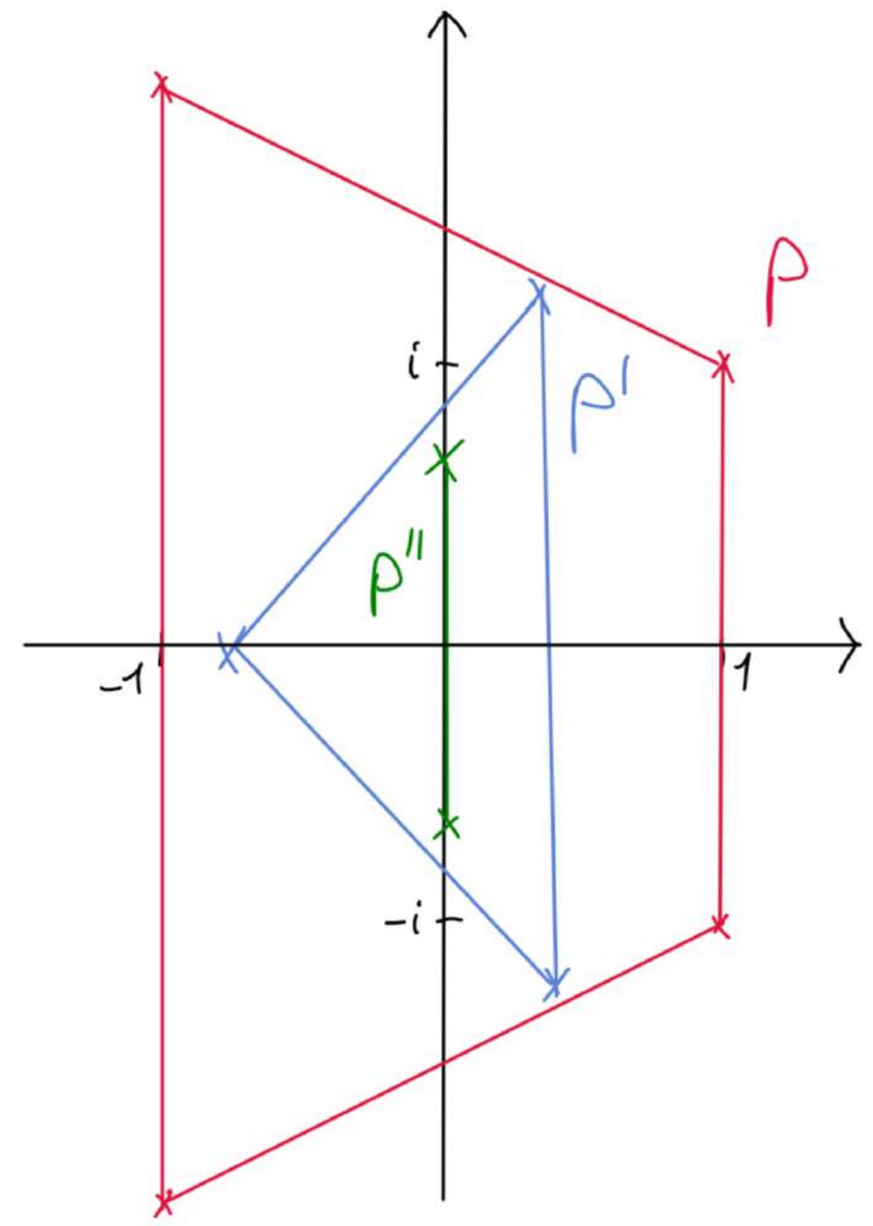


FIGURE 2 : Suite de polygones

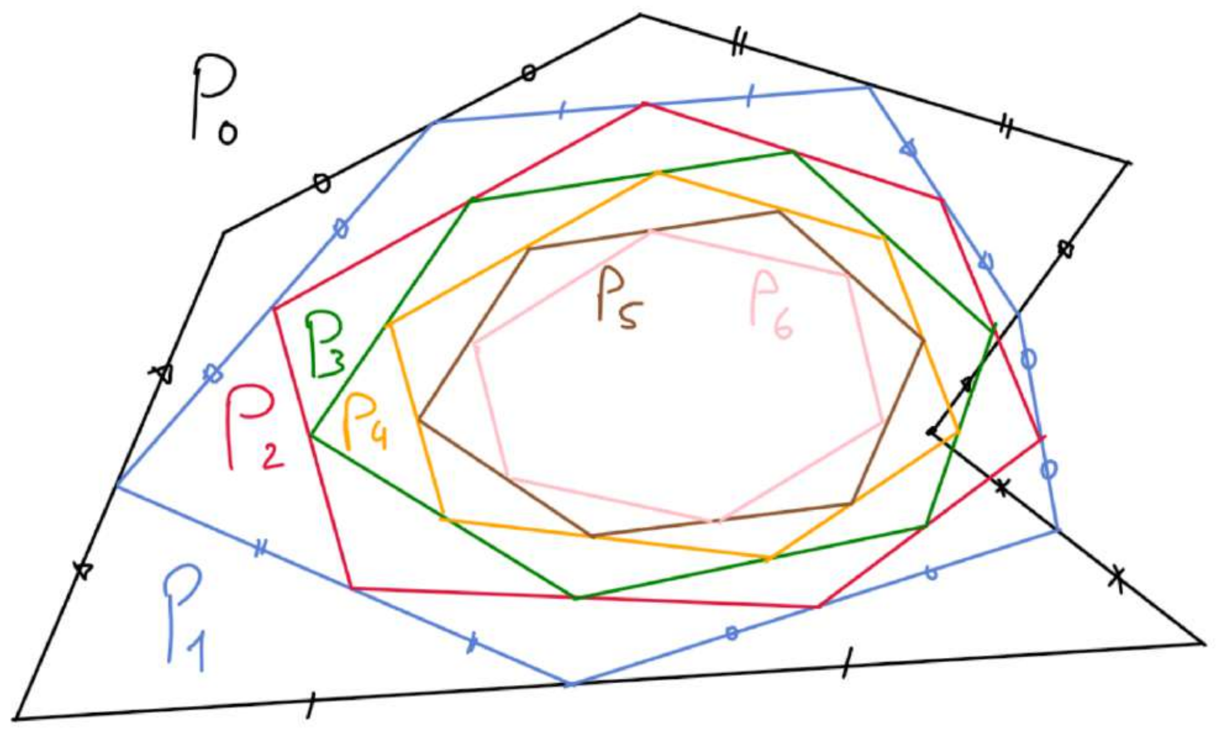


FIGURE 5 : Algorithme de Graham