160

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

I – Notion d'endomorphisme adjoint

Thm 0 : Dans toute la leçon, une assertion sera vraie pour u si et seulement si elle est vraie pour sa matrice dans une base orthonormée.

[R] 718 **Thm/Def 1** : Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$. On l'appelle adjoint de u.

[R] 718~ **Prop 2** : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = {}^tA$

[R] 719 **Cor 3** : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.

- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
- $(u^*)^* = u$
- $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$
- $\det(u^*) = \det(u)$
- $\chi_{u^*} = \chi_u$
- $\mu_{u^*} = \mu_u$

[R] 719 **Prop 4** :
- $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$
- $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$

[R] 719 **Prop 5** : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

[R] 732 735 735 720 724 ? **Def 6** : On note :

- $S(E) := \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^* = u\}$ et $S_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ les ensembles des endomorphismes et des matrices symétriques.
- $S^+(E) := \{u \in S(E) \mid \forall x \in E,\ \langle u(x) | x \rangle \geq 0\}$ et $S_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geq 0\}$ les ensembles des endomorphismes et des matrices symétriques positifs.
- $S^{++}(E) := \{u \in S(E) \mid \forall x \in E,\ \langle u(x) | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0\}$ et : $S_n^{++}(\mathbb{R}) := \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0\}$ les ensembles des endomorphismes et des matrices symétriques positifs définis.
- $O(E) := \{u \in \mathcal{L}(E) \mid uu^* = id_E\}$ et $O_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$ les ensembles des endomorphismes et des matrices orthogonales.
- $SO(E) := \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
- $\mathcal{A}(E) := \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^* = -u\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ les ensembles des endomorphismes et des matrices antisymétriques.

Def 7 : On dit que u est normal si $u^*u = uu^*$. [R] 743

Prop 8 : u est de l'un des types ci-dessus si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ l'est.

Ex 9 :
- Les endomorphismes (anti-) symétriques et orthogonaux sont normaux.
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est normale mais ni (anti-)symétrique, ni orthogonale.

Prop 10 : u est normal $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ [R] 758

II – Réduction des endomorphismes remarquables

Lemme 11 : Il existe un sous-espace de E de dimension 1 ou 2 stable par u. [R] 743

A – Réduction des endomorphismes normaux

Dans ce paragraphe, supposons u normal. **DEV 1**

Lemme 12 : Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u. [R] 743

Lemme 13 : Il existe des sous-espaces $P_1, \dots, P_r$ de E stables par u, de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, tels que $E = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_r$. [R] 744

Lemme 14 : Si $n := \dim(E) = 2$, alors : [R] 745
- Si u admet une valeur propre réelle, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée,
- Sinon, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Thm 15 (de réduction des endomorphismes normaux) : Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que, par blocs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(D_p, R_1, \dots, R_r)$, où $D_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonale, $\forall i \in [\![1,r]\!],\ \exists (a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2 : b_i \neq 0$ et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ et $p + 2r = n$. [R] 745

Cor 16 : Les matrices antisymétriques réelles ou orthogonales sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

B- Autour des endomorphismes (anti-) symétriques

[R] 734 736 736 **Prop 17** : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$. De plus :
- $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}^{+*} \iff A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
- $A \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \iff Sp(A) \subseteq \mathbb{R}^{+}$

[R] 734 **Thm 18** (spectral) : Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable dans une base orthonormée.

[R] 735 **Thm 19** (spectral) : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tPDP$.

Cex 20 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique non réelle, et n'est pas diagonalisable.

[R] 739 **Appli 21** : Pour tout $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $\sqrt{A} \in S_n^+(\mathbb{R})$, appelée racine carrée de A, telle que $\sqrt{A}^2 = A$.

[R] ~733 **Prop 22** :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + \dfrac{A - {}^tA}{2} \in S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

[R] 750 **Prop 23** : Si $u \in S(E)$, alors $E = Ker(u) \overset{\perp}{\oplus} Im(u)$.

[R] 740 **Thm 24** (de décomposition polaire) : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists! (\Theta, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) : A = \Theta S$

[R] ~(771 +780) **Thm 25** : L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

C- Réduction des endomorphismes orthogonaux

Dans ce paragraphe, on suppose u orthogonal.

Notation 26 : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Prop 27 : $Sp(u) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

[R] 727 **Thm 28** (de réduction des isométries) : Il existe $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p+q+2r = n$, $(\theta_1, \dots, \theta_r) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^r$ et une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que, par blocs, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Diag(I_p, -I_q, R(\theta_1), \dots, R(\theta_r))$.

Rq 29 : Dans le théorème précédent, $p = \dim(Ker(u - id_E))$ et $q = \dim(Ker(u + id_E))$. [R] 728

Prop 30 : Le diagramme ci-contre de morphismes de groupes est commutatif. [P] ~146

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "R:\theta \mapsto R(\theta)"] \arrow[dr] & & SO_2(\mathbb{R}) \\ & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Prop 31 : $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \{S(\theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$. [P] ~146

Prop 32 : Ici $n=2$
- u est la rotation du plan d'angle θ centrée en l'origine si, et seulement si la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormée est $R(\theta)$.
- u est la symétrie du plan d'axe $Vect\left(\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}\right)$ si, et seulement si la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormée est $S(\theta)$.

Thm 33 : Si $A \in O_3(\mathbb{R})$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} \det(A) & 0 \\ \hline 0 & R(\theta) \end{array}\right)$. [P] ~148

Cor 34 : Si $u \in SO(\mathbb{R}^3)$, alors u est l'identité ou la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\theta = Arccos((Tr(u) - 1)/2)$ autour de l'axe $Ker(u - id_{\mathbb{R}^3})$. FIGURE 1

III - Étude approfondie des endomorphismes orthogonaux

Prop 35 : Les assertions suivantes sont équivalentes : [R] ~(720 +723)
- u est orthogonal
- $\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|$
- $\forall (x,y) \in E^2, \ \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$
- u envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que $u \in O(E)$.

Prop 36 : [R] 724 726
- $\det(u) \in \{\pm 1\}$
- $Sp(u) \subseteq \{\pm 1\}$

Def 37 : [P] ~125 -126
- Si $\det(u) = 1$, alors u est une rotation,
- Si $u^2 = id_E$ et $Ker(u - id_E) \perp Ker(u + id_E)$, alors u est une symétrie orthogonale,
- Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan,
- Un renversement est une symétrie orthogonale par rapport à un plan

[R] ~731 **Prop 38** : Une symétrie orthogonale s par rapport à un sous-espace F de E est un endomorphisme orthogonal de déterminant $\det(s) = (-1)^{\dim(E)-\dim(F)}$.
En particulier, une réflexion (resp. un renversement) est de déterminant -1 (resp. 1).

Rq 39 : Un projecteur orthogonal distinct de id_E n'est pas un endo. orthogonal !

Prop 40 : Si $u \in O(E)$, alors $E = \mathrm{Ker}(u - id_E) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - id_E)$.

Prop 41 : Si $\dim(E)$ est impaire et $\det(u) = 1$, alors $\mathrm{Ker}(u - id_E) \neq \{0\}$.

Soit q une forme quadratique euclidienne (i.e. définie positive) sur E.

[P] 143 **Thm 42** : Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.

[P] 143 **Lemme 43** : Si $n \geq 3$, alors pour toutes réflexions τ_1 et τ_2, il existe deux renversements σ_1 et σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

DEV2

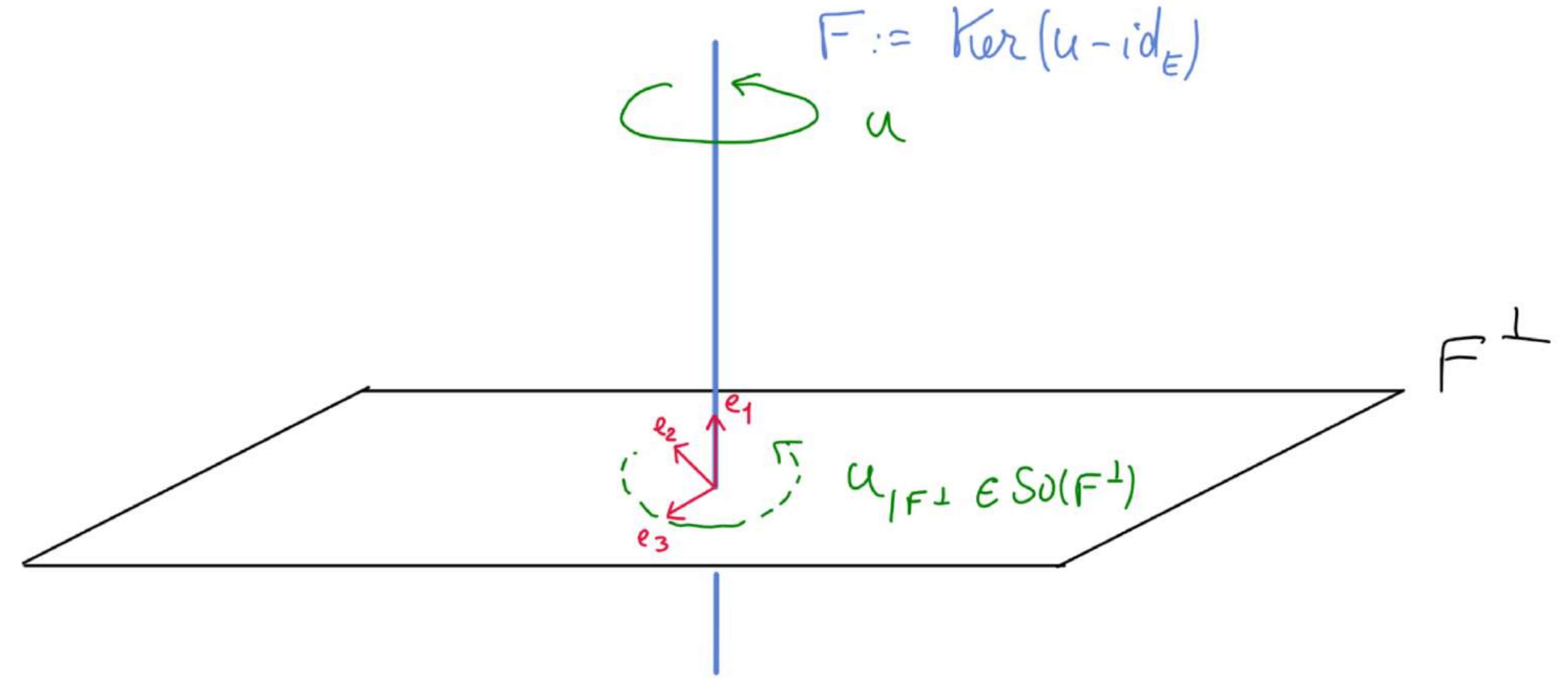
[P] 143 **Thm 44** : Pour $n \geq 3$, tout élément de $SO(q)$ est produit d'au plus n renversements.

RÉFÉRENCES

[R] : Rombaldi Algèbre et géométrie [2e]

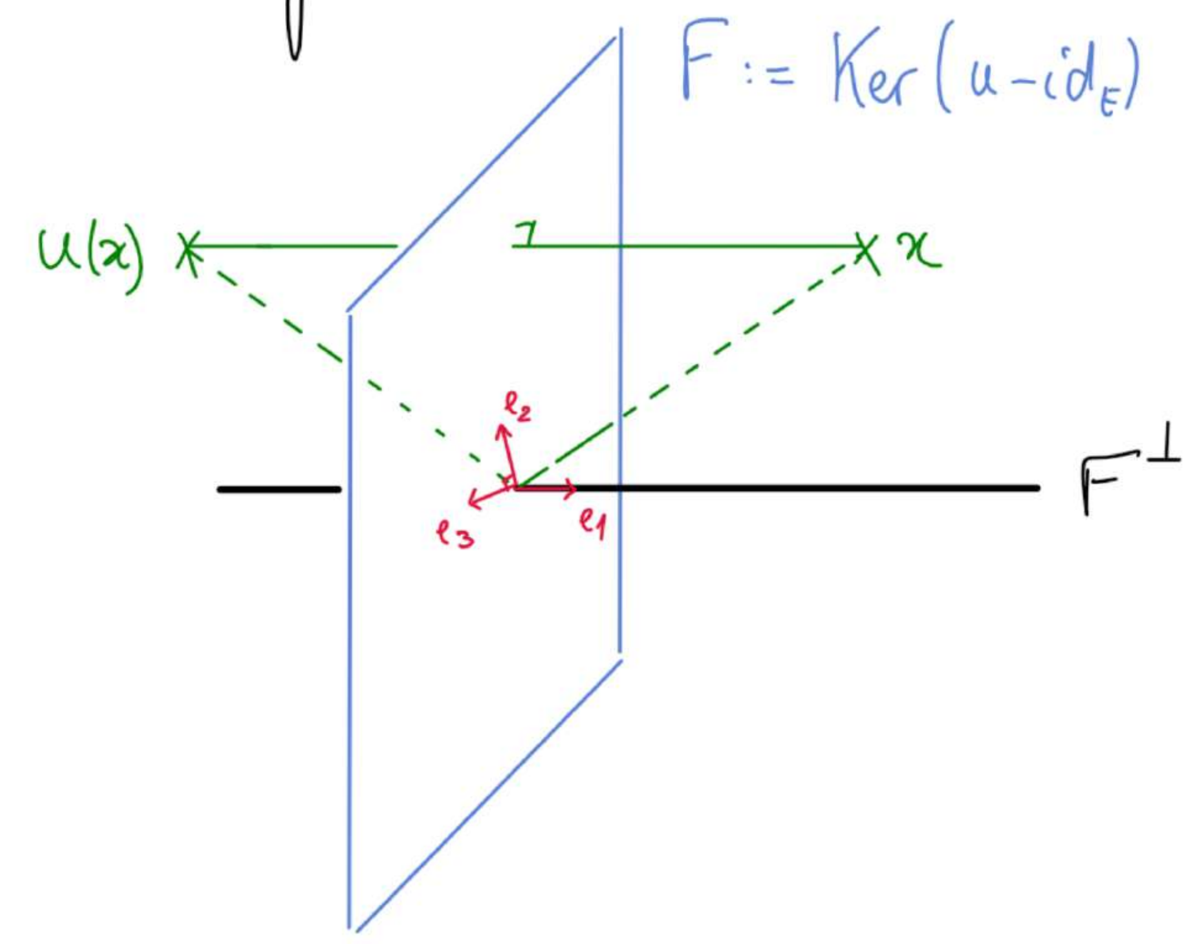
[P] : Perrin.

FIGURE 1.a : Rotation en dimension 3



$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mathrm{Mat}_{(e_2,e_3)}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\theta) \end{pmatrix}$$

FIGURE 1.b : Réflexion en dimension 3 (= renversement)



$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$