NOM : AUFORT Prénom : William Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 220 - Équations différentielles $x' = f(t,x)$. Exemples et étude de solutions en dimension 1 ou 2.

Autre sujet :

vérifie les condi° de CL

I] Théorie générale

a) Problème

Déf 1 : Une équation différentielle $x' = f(t,x)$ est la donnée de (Ω, I, f) où : ↳ notée (E)
- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$
- I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Déf 2 Une solution de cette équa diff est un couple (J, φ) où J est un sous intervalle de I d'intérieur non vide et φ une fonction dérivable, définie sur J à valeurs dans Ω telle que $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$ $\forall t \in J$.

Rem 3 : L'intervalle J fait partie des inconnues.

Déf 4 : Le problème de Cauchy de (E) en (t_0, x_0) est la recherche d'une solution (J, φ) de (E) telle que $\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ t_0 \in J \end{cases}$.

Ex 5 : $x' = x^2$ sur $\Omega = I = \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy en (t_0, x_0) admet une solution unique $\gamma(t) = \dfrac{x_0}{x_0(t_0 - t) + 1}$.
Si $x_0 > 0$, cette fonction est définie sur $]-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}[\neq \mathbb{R}$.

Déf 6 Une solution $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ est dite maximale s'il n'existe pas $(\tilde{J}, \tilde{\varphi} : \tilde{J} \to \mathbb{R}^n)$ solution telle que $J \subset \tilde{J}$ et $\tilde{\varphi}|_J = \varphi$.

Rem 7 Les questions que l'on se pose : Existence de solution ? De solutions maximales ? Unicité ?

b) Théorèmes d'existence et d'unicité

Déf 8 f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable si $\forall (t_0, x_0) \in I \times \Omega$, $\exists V$ voisinage de (t_0, x_0) et $\exists k > 0$ / $\forall t \in I$, $\forall y_1 \in \Omega$, $\forall y_2 \in \Omega$
$(t, y_1) \in V$ et $(t, y_2) \in V \Rightarrow \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.

Théorème 9 (Cauchy-Lipschitz) Si f est localement lips. par rapport à la seconde variable, alors $\forall t_0 \in I$, $\forall x_0 \in \Omega$, $\exists \alpha > 0$ et il existe une application φ : $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\to \mathbb{R}^n$ solution de $x' = f(t,x)$ avec $\varphi(t_0) = x_0$.
De plus il y a unicité au sens suivant : si $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ sont solutions du même problème de Cauchy, alors sur $I \cap J$, $\varphi(t) = \psi(t)$.

Remarque 10 : L'utilisation de Cauchy-Lipschitz est riche en applications, surtout le caractère unique.

Exemple 11 : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si φ et ψ sont 2 sol. max. de $x' = f(t,x)$, si on suppose qu'il existe t_0 tel que $\varphi(t_0) > \psi(t_0)$, alors $\forall t$ $\varphi(t) > \psi(t)$.

Interprétation 12 : Deux solutions distinctes ne se coupent pas.

Remarque 13 : Si l'équation différentielle est linéaire, c'est à dire $x' = A(t)x$, on peut être plus précis :

Théorème 14 (Cauchy-Lipschitz linéaire) $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall t_0 \in I$, il existe une unique solution φ définie sur I telle que $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$ et $\varphi(t_0) = x_0$.

Remarque 15 : Si on suppose seulement f continue, on perd l'unicité.

Exemple 16 $x' = 3|x|^{2/3}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ admet des solutions définies sur $\mathbb{R}$ toutes entre distinctes.

Théorème 17 (Cauchy-Peano-Arzela) Si f est continue, alors $\forall (t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe $\alpha > 0$ et φ solution du problème de Cauchy en (t_0, x_0) sur $]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[$. DEV 1

(ref : Demailly, Analyse numérique & équa diff)

c) Durée de vie, Lemme de Gronwall

On se place dans le cadre du théorème 9.

Théorème 18 (Lemme de sortie de tout compact).
Soit φ une solution maximale définie sur $]t_-, t_+[$. Si $t_+ < \sup I$, alors φ sort définitivement de tout compact contenu dans Ω quand $t \to t_+$

Corollaire 19 Si une solution maximale reste confinée dans un compact $K \subset \Omega$, alors elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 20 $\begin{cases} x' = -y + x(x^2+y^2-1) \\ y' = x + y(x^2+y^2-1) \end{cases}$ en $\left(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$

Si $x_0^2+y_0^2 < 1$, alors la solution maximale en ce point est définie sur $\mathbb{R}$.

Théorème 21 (Lemme de Gronwall) Soient φ, ψ, y continues sur $[a,b]$ telles que $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds$.
Alors $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds$.

Corollaire 22 Si $\exists c \geq 0 / \forall t \in [a,b]$
$y(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) ds$, alors $y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right)$.

Application 23 Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ croissante. Alors toutes les solutions de $x'' + qx = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

II) Méthodes de résolution explicite

a) Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Déf 24 Une équa diff linéaire d'ordre 1 est une équation du type $x' = a(t)x + b(t)$ (L) où $(a,b) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Thm 25: L'ensemble des solutions maximales de (H) : $x' = a(t)x$ forment un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1 : les solutions sont du type $\lambda e^{\varphi(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et φ est une primitive de a sur I.

Thm 26 L'ensemble des solutions de (L) est un espace affine de dim 1, dirigé par S_H ensemble des solutions de (H).

Méthode 27 (Variation de la constante) On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(t) e^{\varphi(t)}$
$\Rightarrow \lambda$ est une primitive de $b(t) e^{-\varphi(t)}$

Exemple 28 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = \sin t$.

Remarque 29 Certaines équations différentielles se ramènent à ces équations.

Ex 30 (Equation de Bernoulli)
$$x' = p(t)x + q(t)x^\alpha, \quad \alpha \neq 1.$$
En posant $y = x^{1-\alpha}$, y est alors solution de $\frac{1}{1-\alpha} y' = p(t)y + q(t)$.

b) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Déf 31 On considère des équations du type $x' = Ax$, où $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Théorème 32 La solution de (E) telle que $x(t_0) = x_0$ est $\varphi(t) = \exp((t-t_0)A).x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Remarque 33 Pour simplifier, on suppose $t_0 = 0$. On s'est ramené à calculer $\exp(tA)$.

Théorème 34 Si $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{T_p} \end{pmatrix} \text{ où } T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$
Alors : $\exp(tA) = P \begin{pmatrix} \boxed{\exp(tT_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\exp(tT_p)} \end{pmatrix} P^{-1}$.

On calcule chaque $\exp(tT_i)$ comme ceci :

$\exp(tT_i) = \exp(\lambda_i t I + tN_i) = e^{\lambda_i t} \exp(tN_i)$
avec N_i nilpotente.
$\Rightarrow \exp(tN_i) = \sum_{n=0}^{} \frac{t^m}{m!} N_i^m = \begin{pmatrix} 1 & & Q_{ij}(t) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
avec $Q_{ij}(t)$ est un polynôme de degré $\leq j-i$, avec $Q_{ij}(0) = 0$.

c) Equation autonome de degré 1

$x' = f(x)$ $\quad f : I \to \mathbb{R}$ continue.
L'équation peut s'écrire $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$.
$\Leftrightarrow \frac{dx}{f(x)} = dt$ à condition que $f(x) \neq 0$.
Dans l'ouvert $U = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times J \;/\; f(x) \neq 0\}$, les solutions vérifient $G(x) = t + \lambda$, d'où $x = G^{-1}(t+\lambda)$.

III) Etude locale qualitative

a) « Interprétation graphique » : portraits de phases

Déf 35 Un champ de vecteurs sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On peut alors s'intéresser à l'équation différentielle :
$$y' = f(y)$$
On parle d'équation autonome (la variable temporelle n'apparaît pas).

Ex 36 Voir en annexe 1 la représentation du champ de vecteurs pour l'équation de Lotka-Volterra $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x(a-by) \\ y(-c+dx) \end{pmatrix}$

Rem 37: $f(y)$ joue alors le rôle de tangente/vecteur vitesse.

Déf 38 Si on se place dans le cas f localement lipschitzien, alors $\forall x \in \Omega$, on note $(I_x, \varphi(x,t))$ la solution maximale de condition initiale (x_0). φ est appelé flot du champ de vecteur f.

Déf 39 : L'orbite de $x \in \Omega$ est l'ensemble O_x formé des points $\{\varphi(x,t), t \in I_x\}$.

Prop / Déf 40 : Les orbites forment une partition de Ω appelée portrait de phases du champ.

Remarque 41 : On a juste formalisé l'ensemble des trajectoires possibles des solutions.

b) Etude : Stabilité, points réguliers

Déf 42 : Soit $y(t,z)$ la solution maximale de $x' = f(t,x)$ telle que $y(t_0, z) = z$. On suppose que $y(t, z_0)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$. On dit que $y(t,z_0)$ est stable s'il existe une boule fermée $B_f(z_0, r)$ et $C \geq 0$ tels que :

1) $\forall z \in B_f(z_0, r)$, $t \mapsto y(t,z)$ définie sur $[t_0, +\infty[$
2) $\forall z \in B_f(z_0, r)$, $\forall t \geq t_0$
$\|y(t,z) - y(t,z_0)\| \leq C \|z - z_0\|$.

Dans le cas contraire, on dit que $y(t,z_0)$ est instable.

Déf 43 La solution $y(t,z_0)$ est dite asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\gamma(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et $\forall z \in B_f(z_0, r)$, $\forall t \geq t_0$,
$\|y(t,z) - y(t,z_0)\| \leq \gamma(t) \|z - z_0\|$.

Remarque 44 Interprétation :
stable $\to$ $y(t,z)$ reste "proche" de $y(t,z_0)$
asymptotiquement stable $\to$ les 2 solutions se rapprochent à l'infini.

Déf 45 : Soit f un champ de vecteurs sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On dit que $x_0 \in \Omega$ est un point critique si $f(x_0) = 0$.

Remarque 46 On dit aussi point singulier. En particulier, si x_0 est un point singulier, la solution constante $x = x_0$ est solution de $y' = f(y)$

Remarque 47 A proximité d'un point singulier, l'allure du champ de vecteur peut avoir plusieurs configurations. $\longrightarrow$ pas un comportement fixe au voisinage d'un point singulier.

c) Exemple : Etude qualitative d'un champ linéaire

$x' = Ax$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On cherche à représenter le portrait de phases selon A.

Remarque 48 $(0,0)$ est un point critique. C'est le seul $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Exercice 49 : On peut tracer l'allure des portraits de phases en fonction des valeurs propres (voir Annexe 2).

Rajouter Riccati

IV) Etude d'exemples

a) Théorème de Sturm et application

DEV 2

Théorème 50 Soient $I \subset \mathbb{R}$, $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ continues telles que $q_2 \geq q_1$. Soient (α, β), $\alpha < \beta$, deux zéros d'une solution non nulle de (E_1) : $y'' + q_1 y = 0$. Alors toute solution de (E_2) : $y'' + q_2 y = 0$ s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

Application 51 : On considère $(E) : y'' + e^t y = 0$. Alors toute solution non nulle admet une infinité de zéros, que l'on peut ordonner en une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a en particulier $e^{t_n} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\pi^2 n^2}{4}$.

b) Equation de Lotka-Volterra

On considère le système :

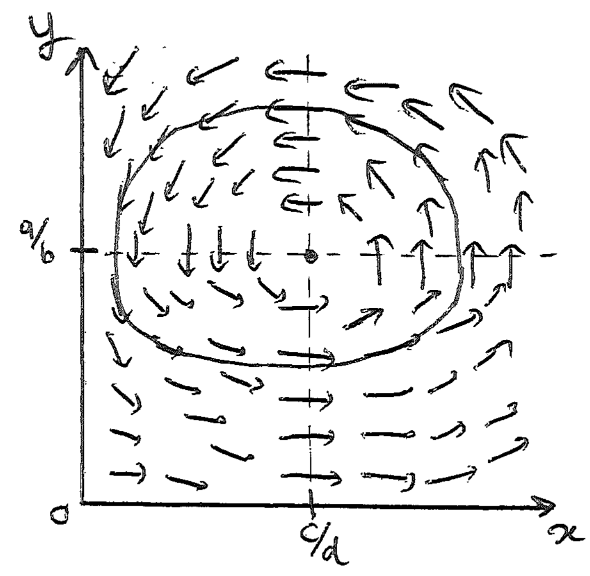
$$(E) \begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$$

Remarque 52 Modélise un système proie-prédateur

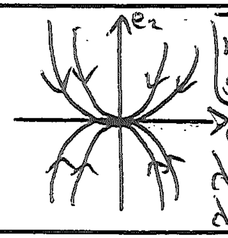
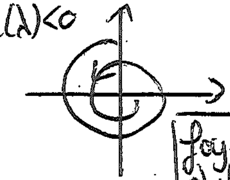
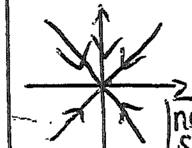
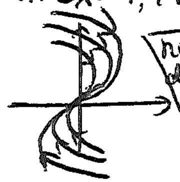
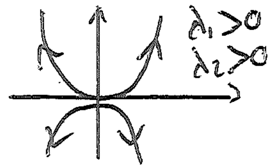
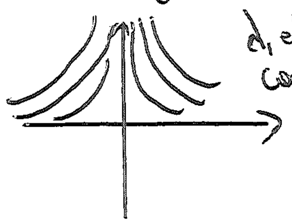
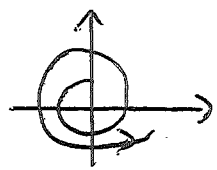
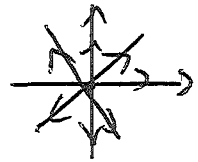
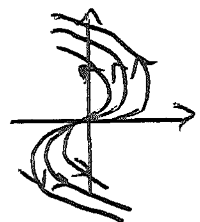
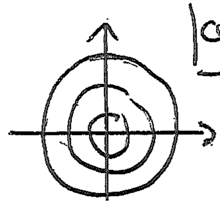
Exercice 53 : Les solutions "non triviales" (telles que $x(0) \neq 0$ ou $y(0) \neq 0$) sont périodiques. (voir annexe 1)

Références : Gourdon, Demailly, Laudenbach.

Annexe 1 | Système Lotka-Volterra



Annexe 2 (dans le cas $\det A \neq 0$)

nature de l'équilibre \ λ_1, λ_2 valeurs propres	réelles distinctes	complexes conjuguées	égales
Asymptotiquement stable	 e_2 e_1 $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$ $\boxed{\text{noeud stable}}$	$Re(\lambda) < 0$  $\boxed{\text{foyer stable}}$	$\dim E_\lambda = 2$  $\boxed{\text{noeud stable}}$ ou $\dim E_\lambda = 1$, $\lambda < 0$  $\boxed{\text{noeud dégénéré stable}}$
Instable	 $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\boxed{\text{noeud instable}}$ ou  λ_1 et λ_2 de signe contraire $\boxed{\text{col}}$	$Re(\lambda) > 0$  $\boxed{\text{foyer instable}}$	$\dim E_\lambda = 2$  $\boxed{\text{noeud instable}}$ ou $\dim E_\lambda = 1$ $\lambda > 0$  $\boxed{\text{noeud dégénéré instable}}$
Stable		 $\boxed{\text{centre}}$	

Référence: Grifone, Algèbre linéaire (L'analyse est détaillée).

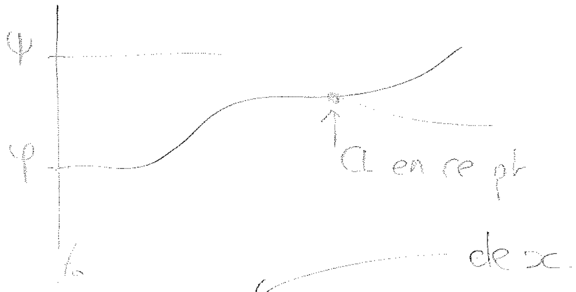
Note: le livre cite lui même Hirsch, Smale, Differential equations, dynamical systems and linear algebra

I) Questions plan

- Exple 11 Illustre quoi ?

↳ Illustre une appli directe de CL.

Dire que f vérifie les condi° de CL, φ & ψ sont maximales



Pas vrai en dim 2. Pq ?

↳ Parce qu'on n'a pas le TVI pour dire que ça implique que ça se croise

II) Commentaires plan

- Parler plus de stabilité et de fonctions de Lyapounov.

Lyapounov justifie l'étude qualitative linéaire.

Ce qu'on comprend bien c'est les théories des équa° lin. coeff cst

Puis non-cst lin (théorie de Floquet pr les coeff périodiques).

Non-linéaire : on comprend plus rien. Localement, si sp de Re < 0, thm de Lyapounov. Et fonc° de Lyapounov pour peu localement.

- Indispensable : intégrales premières

Seul instrument qui nous permet d'avancer ds les chps de vect non linéaires.

Permet de réduire la dim pour ...

Ex de la système de Lotka-Volterra

$y' = f(y)$ $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ H tq $\forall y$ sol° s/ I, $H(y) = \text{cste}$ + régularité sr H

$dH_{y(t)} \circ \underbrace{\frac{d}{dt}y(t)}_{f(y(t))} = 0$

Si H différentiable, pour trouver H on peut résoudre l'EDP $\sum \frac{\partial H}{\partial y_i} \times f_i = 0$

$\Leftrightarrow \langle \nabla H, f \rangle = 0$

Plein d'exples intéressants

// mécanique. Intégrale première = énergie.

- Peut parler des Wronskien
- Liouville

III Exercices

1. $y'' + qy = 0$ (E). $y(t) = \exp\left(\int_0^t z(u)\,du\right)$: chgt de variable.

$y'(t) = z(t)\,y(t)$

$y''(t) = z'(t)\,y(t) + z(t)^2\,y(t)$

$\hookrightarrow$ $z'(t)\,y(t) + z(t)^2\,y(t) + q(t)\,y(t) = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{z' + z^2 + q = 0}$ (E')

avec $z = \dfrac{y'}{y}$ (équa° de Riccati)

<u>Rq</u>. Thm de Sturm. Les zéros de l'équa° de Sturm (E) correspondent aux pts de singularité / d'explosion de l'équa° de Riccati (E')

$\longrightarrow$ Bien à mettre en appli du thm de Sturm

1 : DVP2

THÉORÈME DE STURM ET APPLICATION

(2.9)

ie y_1 oscille + vite que y_2

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ continues telles que $q_1 \geqslant q_2$.
Soient (α, β), $\alpha < \beta$, deux zéros d'une solution non nulle de $y'' + q_2 y = 0$.
Montrer que toute solution de $y'' + q_1 y = 0$ (E_1) s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

2) Application : (E) $y'' + e^t y = 0$ sur $I = \mathbb{R}^+$. Montrer qu'une solution non nulle admet une infinité de zéros que l'on peut ordonner en une suite (t_n) croissante. Montrer finalement que $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $e^{t_n} \sim \dfrac{\pi^2 n^2}{4}$.

Référence : FGN, Oraux X-ENS Analyse 4.

1) • Soit y_2 une solution non nulle de (E_2) admettant α et β pour zéros.
On commence par montrer que les zéros de y_2 sont isolés.

En effet, y_2 est de classe C^2. Au voisinage de α on peut écrire
$$y_2(\alpha + h) = \underbrace{y_2(\alpha)}_{=0} + h y_2'(\alpha) + o(h)$$
Si $y_2'(\alpha) = 0$, alors par unicité du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + q_2 y = 0 \\ y(\alpha) = y'(\alpha) = 0 \end{cases}$,
nécessairement $y_2 = 0$, ce qui est exclus. D'où $y_2'(\alpha) \neq 0$
et donc pour h suffisamment petit $y_2(\alpha + h) \neq 0$, soit
$$\exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in]\alpha - h, \alpha + h[,\ x \neq \alpha,\ y_2(x) \neq 0$$
Ce qui prouve bien que les zéros de y_2 sont isolés. → signe cst, OPS > 0 (OPS $\mathbb{N}$, [illegible])

• Pourquoi cela ? Pour raisonner sur les signes de y_1, y_2

Par l'absurde, si y_1 solution de (E_1) ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$, elle garde un signe constant (supposons > 0). Comme les zéros de y_2 sont isolés, on peut supposer que β est le premier zéro de y_2 après α, et donc que y_2 a aussi un signe constant (supposons > 0 de même). On s'intéresse à

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$. W est de classe C^1 et

Pas un wronskien car ce ne sont pas 2 sol. de la même éq.

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -q_1 y_1 & -q_2 y_2 \end{vmatrix} = \underbrace{y_1 y_2}_{>0} \underbrace{(q_1 - q_2)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

développer c'est simple ici

W est donc croissante sur $[\alpha, \beta]$ avec

$$W(\alpha) = \underbrace{y_1(\alpha)}_{>0} \underbrace{y_2'(\alpha)}_{>0 \left(\substack{y_2(\alpha)=0 \\ \text{et } y_2 \text{ positive sur }]\alpha,\beta[}\right)} > 0 \quad \text{et} \quad W(\beta) = \underbrace{y_1(\beta)}_{>0} \underbrace{y_2'(\beta)}_{<0 \text{ (même argument)}} < 0$$

Les valeurs de $W(\alpha)$ et $W(\beta)$ contredisent la croissance de α, absurde. □

2) Soit y une solution non nulle de $y'' + e^t y = 0$

Idée: [Utiliser 1) et une autre équadiff pour exhiber un nouveau zéro.

- Soit $\alpha \geq 0$ $\quad e^t \geq \underbrace{e^\alpha}_{} \quad \forall t \in [\alpha, +\infty[$

  On regarde $y'' + e^\alpha y = 0$, dont une solution est

  $$z(t) = \sin\left(e^{\alpha/2}(t-\alpha)\right)$$, cette solution s'annule en α et $\alpha + \pi e^{-\alpha/2}$, donc d'après 1), $\underline{y \text{ s'annule sur } [\alpha, \alpha+\pi e^{-\alpha/2}]}$

  En réitérant ce procédé on voit que le nombre de zéros de y est infini.

- On a vu que les zéros de y sont isolés, il y a donc un nombre fini dans tout compact $[0, A]$, $A > 0$, ce qui permet de les ordonner en une suite croissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a tout de suite $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, car (t_n) n'est pas majorée.

- <u>Équivalent de $t_{n+1} - t_n$:</u> Le procédé précédent avec $\alpha = t_n$ montre que $t_{n+1} \leq t_n + \pi e^{-t_n/2}$.

  On utilise le même genre de technique pour l'encadrement inverse:

  Soit $J = [t_n, t_{n+1}]$ $\quad e^t \leq \underbrace{e^{t_{n+1}}}_{} \quad \forall t \in J$

  On regarde $y'' + e^{t_{n+1}} y = 0$, dont une solution est

  $$u(t) = \sin\left(e^{\frac{t_{n+1}}{2}}(t - t_n)\right).$$ donc sur $J = [t_n, t_{n+1}]$, u s'annule,

  or u s'annule pour $t = t_n + \pi e^{-\frac{t_{n+1}}{2}}$, ce qui prouve que

  $$t_n + \pi e^{-\frac{t_{n+1}}{2}} \leq t_{n+1}$$

  D'où $$\underbrace{\pi e^{-\frac{t_{n+1}}{2}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \leq t_{n+1} - t_n \leq \underbrace{\pi e^{-\frac{t_n}{2}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

  donc $t_{n+1} - t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies e^{\frac{t_{n+1}}{2}} \underset{+\infty}{\sim} e^{t_n/2}$, et finalement

$$t_{n+1} - t_n \sim \frac{\pi}{e^{t_n/2}}$$

- <u>Équivalent de e^{t_n}</u> : Soit $u_n = e^{t_n/2} \iff t_n = 2\ln(u_n)$.

L'équivalent précédent devient

$$\left.\begin{array}{l} 2(\underbrace{\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{u_n} \\ \ln\left(\underbrace{\dfrac{u_{n+1}}{u_n}}_{\downarrow n\to+\infty \; 1}\right) \sim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi/2$$

qui est le terme général d'une série divergente.

On peut alors sommer les équivalents et en déduire

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \underset{+\infty}{\sim} (n-1)\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n\pi}{2} \\ \quad u_n - u_1 \sim u_n \end{array}\right\} \rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\pi}{2}$$

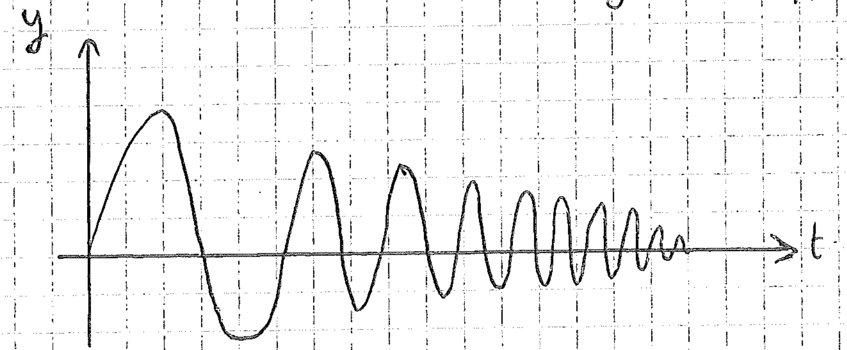
Avec $u_n = e^{t_n/2} = \sqrt{e^{t_n}}$

<u>D'où</u> $$e^{t_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2\pi^2}{4}$$

<u>Note</u> : En particulier, comme $e^{t_n} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 1$, on peut passer au log dans l'équivalent pour obtenir :

$$t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right) = \ln(n^2) + \ln\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \underline{2\ln(n)}$$

Les zéros se rapprochent.



Questions

Que se passe-t-il si on remplace e^t par t dans l'appli