149

Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Dans cette leçon, K désigne un corps commutatif, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On identifie K^n et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$.

I - Éléments propres d'une matrice

A - Définitions et calcul exact

[M²] 51 __Def 1__ : Pour $\lambda \in K$, on pose $E_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in K^n \mid AX = \lambda X\}$.
On dit que λ est une valeur propre de A si $E_\lambda(A) \neq \{0\}$. On appelle alors sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ l'espace $E_\lambda(A)$. Ses éléments non nuls sont appelés vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.
On note $Sp_K(A)$ (ou $Sp(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur K) l'ensemble des valeurs propres de A, appelé spectre de A.

[M²] 54 4 __Def 2__ : • On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in K[X]$$

• On appelle polynôme minimal de A l'unique polynôme unitaire π_A tel que :

$$\pi_A K[X] = I_A := \{P \in K[X] \mid P(A) = 0\}.$$

[Rb] 605 644 __Prop 3__ : $\forall P \in I_A$, $Z(P) \subseteq Sp_K(A)$ avec égalité si $P = \chi_A$ ou $P = \pi_A$.

__Def 4__ : Écrivons $\chi_A = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)^{\mu(\lambda)}$. On appelle $\mu(\lambda)$ la multiplicité de λ.

__Ex 5__ : • Pour $n = 2$, $\chi_A = X^2 - Tr(A)X + \det(A)^2$, donc $Sp(A) = \left\{\frac{1}{2}\left(Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4\det(A)^2}\right)\right\}$.

• Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$ donc $Sp(A) = \{-1, 2\}$.

B - Cas particuliers

1) Matrices symétriques et hermitiennes

Soit A dans $S_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

DEV 1

__Lemme 6__ : $Sp(A) \subseteq \mathbb{R}$. [Rb] 734 [Go] 256

__Lemme 7__ : $\forall (\lambda, \mu) \in Sp(A)^2$, $\lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

__Thm 8__ (spectral) : Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité. Il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^t\overline{P}P = I_n$ et :

$${}^t\overline{P}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

__Rq 9__ : En pratique, on calcule les valeurs propres de A, on résoud $AX = \lambda X$ pour trouver un vecteur propre (que l'on normalise) pour chaque $\lambda \in Sp(A)$. On prend P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres précédemment trouvés.

__Cor 10__ : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ [Rb] 736
$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(A) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$

__Appli 11__ : Racine carrée d'une matrice positive. [Rb] 739

__Rq 12__ : Diagonaliser une matrice simplifie (entre autre) les calculs :
- de puissance : on trouve des applications à l'étude des suites $X_{n+1} = AX_n$
- d'exponentielle : on trouve de applications dans l'étude des systèmes d'équations différentiels linéaires

2) Matrices stochastiques

__Def 13__ : On dit que A est stochastique si elle est à coefficients positifs et si chacune de ses lignes somme à 1.

__Prop 14__ : Une matrice stochastique admet $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre.

Prop 15 : Si λ est valeur propre complexe de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique, alors $|\lambda|<1$ ou λ est une racine m-ième de l'unité, avec $m\leq n$.

3) Matrices nilpotentes / d'ordre fini

Prop 16 : Si A est nilpotente, alors $\chi_A = X^n$ et $Sp(A)=\{0\}$.

Prop 17 : Si A est d'ordre fini, alors les valeurs propres de A sont des racines de l'unité.

4) Matrices compagnons et circulantes

Prop 18 : Soient $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors $\chi_A = P$, et $Sp(A) = Z(P)$.

[Go] 315 **Prop 19** : Soient $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$, $P=\sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et

$$C(a_1,\dots,a_n) := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\det(C(a_1,\dots,a_n)) = \prod_{k=1}^n P(\omega^k)$.

DEV 2.a

II – Recherche approchée d'éléments propres

Soit $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A - Normes matricielles et conditionnement

[Rb] 654 **Def 20** : On appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A) := \max_{\lambda\in Sp(A)}|\lambda|$.

Def 21 : On appelle valeurs singulières de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les valeurs propres de $\sqrt{A^*A}$. Ce sont les $\sqrt{\lambda}$, $\lambda\in Sp(A^*A)$.

Def 22 : On appelle norme matricielle une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Prop 23 : Toute norme subordonnée est une norme matricielle.

[Rv] 30 **Ex 24** : Pour $(p,q)\in[1,+\infty]^2$, on pose $|||A|||_{p,q} = \sup_{\|X\|_q\leq 1}\|AX\|_p$.

En particulier, $|||A|||_{1,1} = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$, $\quad |||A|||_{\infty,\infty} = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$,

$$|||A|||_{2,2}=\sqrt{\rho(A^*A)}$$

Def 25 : Le conditionnement de $A\in GL_n(\mathbb{K})$ (relativement à une norme matricielle $|||\cdot|||$) est $\kappa(A) = |||A|||\cdot|||A^{-1}|||$ [Ci] 27–31

Prop 26 : Le conditionnement est une mesure de la sensibilité du système linéaire $Ax=b$ à la variation des données A et b. Plus précisément, si on note ΔA une perturbation de A, Δb une perturbation de b, x la solution de $AX=b$, alors :

- Si $x+\Delta x$ est la solution de $AX=b+\Delta b$, alors $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\leq \kappa(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.
- Si $x+\Delta x$ est la solution de $(A+\Delta A)X=b$, alors $\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|}\leq \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.

Rq 27 : Pour $|||\cdot||| = |||\cdot|||_{2,2}$, $\kappa(A) = \frac{|\sigma_{max}|}{|\sigma_{min}|}$ où $|\sigma_{max}|$ et $|\sigma_{min}|$ sont les modules maximal et minimal des valeurs singulières de A. Si de plus $A^*A = AA^*$ (i.e. A est normale), alors $\kappa(A)=\frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$ où $|\lambda_{max}|=\rho(A)$ et $|\lambda_{min}|=\rho(A^{-1})^{-1}$ est le module de la plus petite valeur propre de A.
En particulier, si $A^*A = I_n$, alors $\kappa(A)=1$.

B - Localisation & approximation

Thm 28 (disques de Gerschgörin) : Soient $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda\in Sp(A)$. [Rb] 651
Il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda\in B(a_{i,i}, d_i)$ où $d_i := \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. FIGURE 1

Prop 29 : Si A est diagonalisable, alors la suite définie par $X_0\in\mathbb{K}^n$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $X_{k+1} = AX_k$:

- converge vers 0 si $\rho(A)<1$,

- converge vers un vecteur propre associé à 1 si $1 \in Sp(A)$ et $\rho(A) = 1$

<u>Appli 30</u> : Soit P un polygone dont les sommets ont pour affixe $z_1, \dots, z_n$. On définit la suite $(P_n)_n$ de polygones par $P_0 = P$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est le polygone dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_n. Alors la suite $(P_n)_n$ converge vers l'isobarycentre de P. FIGURE 2 DEV 2.b

<u>Thm 31</u> (méthode de la puissance) : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, notons $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_r|$. Soit $(x_k)_k$ définie par $x_0 \in E \setminus \mathrm{Im}(A - \lambda_1 I_n)$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = (A x_k) / \|A x_k\|$. Alors :

- $\|x_k\| \longrightarrow |\lambda_1| = \rho(A)$
- $\exists v \in E_{\lambda_1}(A) \setminus \{0\}$: $x_{2k} \longrightarrow v$, $x_{2k+1} \longrightarrow sg(\lambda_1) v$

<u>RÉFÉRENCES</u>

[Rb]

[Rv]

[Ci]

FIGURE 1 : Disques de GERSCHGÖRIN

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2+i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & -1-i \end{pmatrix} \quad , \quad Sp(A) = \{1, i, -2-i\}$$

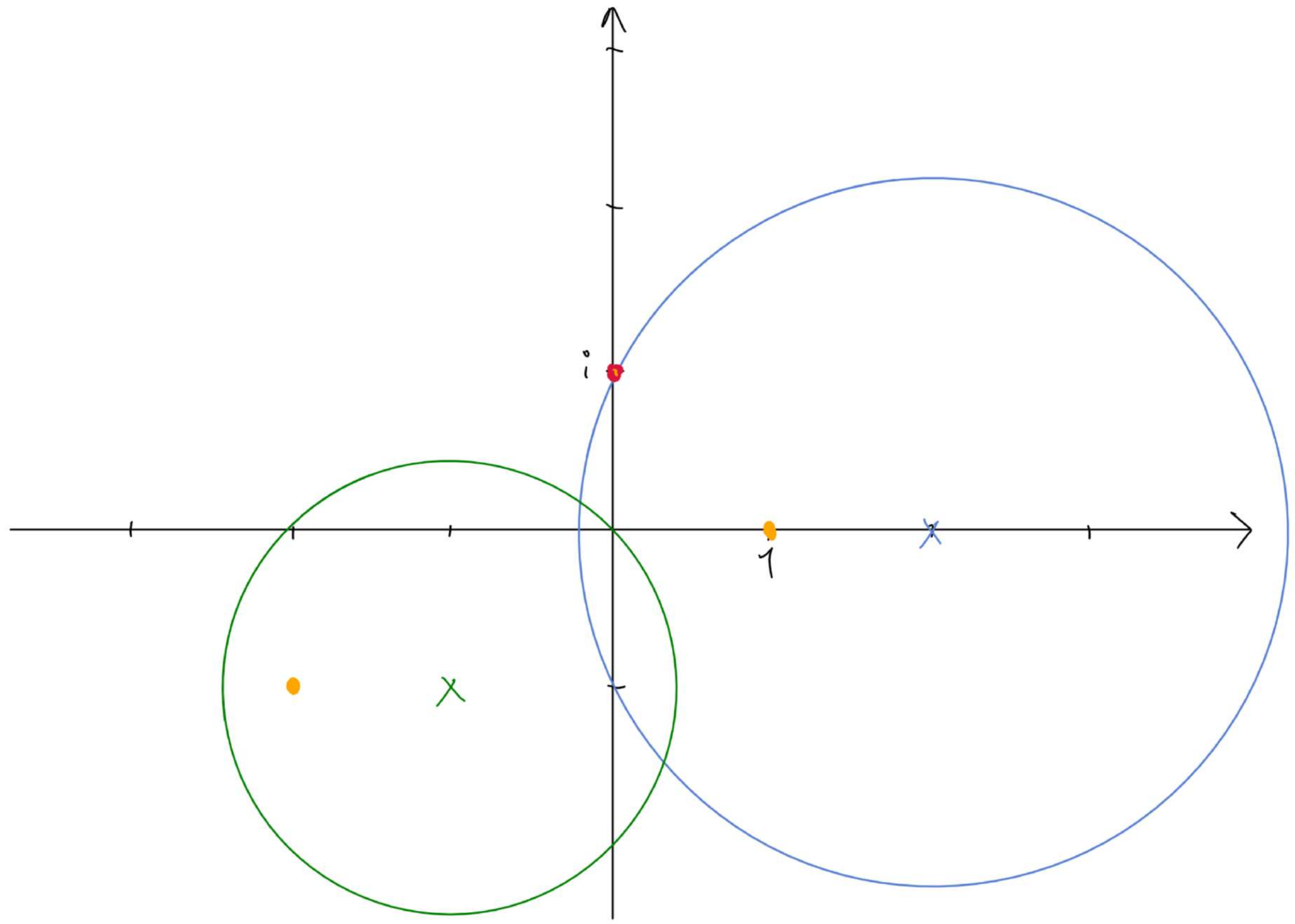

FIGURE 2 : Suite de polygones