219

NOM : Becquet **Prénom :** Antoine **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Autre sujet :

Réf : Noudin, Beck-Malick-Peyre, Rouvière. Demailly

Soit E un espace vectoriel normé réel et X une partie de E. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ admet en $x_* \in X$ un minimum si $\forall x \in X, f(x_*) \leq f(x)$. On parle de minimum local si cette inégalité a lieu sur un voisinage de x_*. On définit de la même manière les maxima et les maxima locaux.

1) Existence, unicité

1.1) Fonctions continues

(Th 1) Si X est compact alors $f : X \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$ admet un minimum (et un max).

(App 2) Si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ alors il existe $y \in F$ tq $d(x, F) = \|x - y\|$. (pas unique)

(App 3) Si X est compact et $f : X \to X$ vérifie $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ alors il existe un unique $\alpha \in X$ tq $f(\alpha) = \alpha$.

(Def 4) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite coercive si $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$.

(App 5) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue coercive alors f admet un minimum.

(Ex 6) Soit $A \in SDP_n$; $b \in \mathbb{R}^n$. L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ est coercive et continue.

DP !!

1.2) Fonctions convexes

ds recherche ss contrainte (2) contraintes lin. → cvxe. pas de joc

(Def 7) Si X est convexe, on dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est strictement convexe si $\forall t \in]0, 1[, \forall x, y \in X$ $f(tx + (1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y)$.

(Prop 8) $f : X \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est strictement convexe si $\forall x \in X$, $d^2_x f$ est définie positive (ici X convexe de $\mathbb{R}^n$, on sait par Schwarz que $d^2_x f$ symétrique).

(Notation) si f est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ on note $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ l'unique vecteur tq $d_x f(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle$ et si f est deux fois différentiable on note $\nabla^2 f(x)$ l'unique matrice telle que $d^2_x f(h, k) = \langle Mh, k \rangle$

(Ex 9) avec les notations de l'ex 6. on a $\nabla f(x) = Ax - b$, $\nabla^2 f(x) = A > 0$ donc f strictement convexe.

(Th 10) Si f est strictement convexe et admet un minimum, celui-ci est unique.

Dev 1

Hessienne Hess(f) gdt $Df_x(h) = \langle \nabla f_x | h \rangle$ ← fme lin, $D^2 f_x(h', h) = {}^t h' \nabla^2 f_x h$ ← fme bilin

2) Localisation

2.1 Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$.

(Th 11) Si f est différentiable sur U et si f admet en $x_* \in U$ un extremum alors $\nabla f(x_*) = 0$ (on dit que x_* est un point critique de f)

(App 12) <u>Théorème de Rolle</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(App 13) On reprend $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$. f admet un unique x_* minimum qui vérifie donc $\nabla f(x_*) = Ax_* - b = 0$ soit $x^* = A^{-1}b$. On en déduit

(App 14) Calcul de $A^{-1}b$ par méthode du gradient. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour $k \geq 0$:

$\to d_k = -\nabla f(x_k)$; $\to t_k$ minimisent $f(x_k + t d_k)$

$\to x_{k+1} = x_k + t_k d_k$.

Alors $x_k \to x_* = A^{-1}b$ avec $\left\{ \begin{array}{l} \text{on note} \\ \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \\ \text{les vp de } A \end{array} \right.$

$$\|x_k - x_*\| \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^k \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} \, \|x_0 - x_*\|$$

(CEx 15) • <u>Si U n'est pas ouvert</u> : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0)$ minimum de f, pourtant $f'(0) = 1$.

• <u>Pas de réciproque</u> : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ on a $f'(0) = 0$, pourtant f n'a pas de max.

(Th 16) Si $f : U \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ et $x \in U$:

1) Si $\nabla f(x) \neq 0$, x n'est pas un extremum.

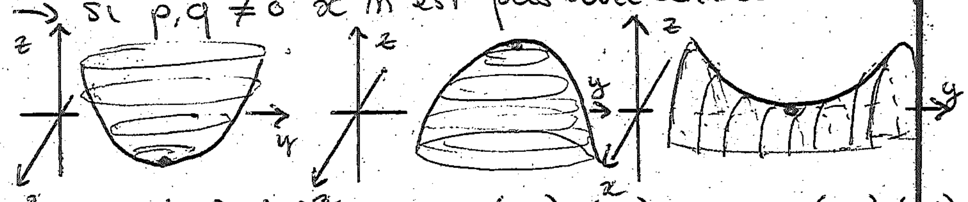
2) Si $\nabla f(x) = 0$, on note (p, q) la signature de $\nabla^2 f(x)$; qu'on suppose $\neq 0$.

$\to$ si $q = 0$ x est un minimum local, strict si $p = n$.

$\to$ si $p = 0$ x est un maximum local, strict si $q = n$.

$\to$ si $p, q \neq 0$ x n'est pas un extremum.

⚠ ∇f_x et $\nabla^2 f_x$ n'ont pas de rapport



$(p,q) = (2,0)$ $(p,q) = (0,2)$ $(p,q) = (1,1)$

2.2 Optimisation sous contraintes

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(g_i : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R})_{i \leq m}$ m fonctions et $C = \{x \in U, \forall i, g_i(x) = 0\}$

(Th 17) <u>Extrema liés</u> : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en x_* extremum local de f sur C et si les $d_{x_*}g_i$ sont linéairement indépendantes alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tq $d_{x_*}f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_{x_*} g_i = 0$.

(Ex 18) Trouver le minimum et le maximum de $(x,y,z) \mapsto x^3 + y + z$ pour $(x,y,z) \in S^2$.

219

Dev 2

(App 19) Soit $M \in Sym_n$. M est diagonalisable en base orthonormée.

(CEx 20) $f(x,y) = x + y^2$; $g(x,y) = x^3 - y^2$.
$g(x,y) = 0 \Rightarrow x \geq 0$ donc le minimum de f sous la contrainte g est $x = y = 0$.
Pourtant $\nabla f(0,0) + \lambda \nabla g(0,0) = \binom{1}{0} \neq 0$.

(App 21) Billard elliptique : il existe sur un billard elliptique une trajectoire fermée à trois rebonds.

3) Théorème de projection dans un Hilbert

3.1) Énoncés.

Soit H un espace de Hilbert réel muni de son p.s $(\cdot,\cdot)$ et de sa norme $\|.\|$.

(Th 22) Soit A un convexe fermé non vide de H et $x \in H$. Alors il existe un unique $y \in A$ tq $\|y - x\| = \min_{z \in A} \|x - z\|$.

(Cor 23) Si $A = F$ est un sev fermé de H on note $y = p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. On a alors $\forall z \in F\ (x - p_F(x), z) = 0$ et $p_F : H \to F$ 1-lipschitzienne.

(App 24) Calculer $\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^{1} (x^3 - a - bx - cx^2)^2 dx$

Plus généralement si $f \in L^2[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ minimisant $\int_{[a,b]} (f-P)^2$

3.2 Applications.

(Th 25) Soit F un sev fermé de H. On définit $F^\perp = \{x \in H,\ \forall y \in F\ (x,y) = 0\}$. Alors $F^\perp$ est un sev fermé de H et $F \oplus F^\perp = H$.

(CEx 26) Importance de F fermé : dans $H = \ell^2 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum x_i^2 < \infty\}$ on considère $E = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ x_i$ non nuls en nb fini$\}$.
E est un sev de $H = \ell^2$, pourtant $E^\perp = \{0\}$ et donc $E \oplus E^\perp = E \neq H$.

(App 27) F sev de H (pas fermée). Alors F dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

(App 28) Hahn Banach analytique dans H
Si F sev fermé de H et $u \in F'$ alors il existe $v \in H'$ prolongeant u et de même norme.

(App 29) Hahn Banach géométrique dans H
Soient A, B des convexes non vides et disjoints de H. On suppose A fermé, B compact. Alors il existe $f \in H'$ telle que $\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$.

(App 30) Soit D une partie de H (non vide). L'enveloppe convexe fermée de D est l'intersection des demi-espaces de H contenant D.

À quoi ça sert ?
Il faut des appli concrètes.

219 Extremums : Ece, caractérisation, recherche. Exples & appli.

- Devs possibles :
  - thm des extrema liés — Gourdon
  - méthode du gradient à pas opt / conjugué — Ramis W.
  - des pbs d'optim. ?
  - parler longuement des mult de Lagrange & de leur appli au PL ??
  - ? ...
  - bcp de billards, d'ellipses, de chemins optiques ...
  - Pt de Fermat, bulle de savon, ...

Leçon 219, dév 1 : Méthode du gradient à pas optimal

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$.

$x_* = A^{-1}b$, $A \in SDP_n$

$\to x_0 \in \mathbb{R}^n$ et si $k \geq 0$:

$$\begin{cases} \to d_k = -\nabla f(x_k) = b - Ax_k \\ \to t_k \text{ minimisant } f(x_k + td_k) \\ \to x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$$

Alors $x_k \longrightarrow x_*$ et $\|x_k - x_*\| \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^k \|x_0 - x_*\| \sqrt{\cdot}$

---

1) Existence et expression de t_k :

On a $f(x_k + td_k) = f(x_k) + (\nabla f(x_k), td_k) + \frac{1}{2}(Atd_k, td_k)$

$$= f(x_k) - t(d_k, d_k) + \frac{t^2}{2}(Ad_k, d_k)$$

On note pour $x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\|_A^2 = (Ax, x)$: l'expression est polynomial en t ; on en déduit

$$t_k = \frac{\|d_k\|^2}{\|d_k\|_A^2}.$$

Rq : si $d_k = 0$ alors $x_k = A^{-1}b$ c'est fini !

2) Calcul de $\|x_{k+1} - x_*\|_A^2$ en fonction de $\|x_k - x_*\|_A^2$

On écrit $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ puis

$$\|x_{k+1} - x_*\|_A^2 = \|x_k - x_*\|_A^2 + \|t_k d_k\|_A^2 + 2(A(x_k - x_*), t_k d$$

avec $Ax_k = b - d_k$, $Ax_* = b$ on a

$$(A(x_k - x_*), t_k d_k) = -t_k \|d_k\|^2$$ On obtient :

$$\|x_{k+1} - x_*\|_A^2 = \|x_k - x_*\|_A^2 + \frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2} - 2\frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2} = \|x_k - x_*\|_A^2 - \frac{\|d_k}{\|d_k}$$

et donc $$\frac{\|x_{k+1} - x_*\|_A^2}{\|x_k - x_*\|_A^2} = 1 - \frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2 \|x_k - x_*\|_A^2}$$

Ecrivons alors $A^{-1}d_k = A^{-1}(b - Ax_k) = x_* - x_k$.

on trouve $\|x_k - x_*\|_A^2 = (A^{-1}(x_k - x_*), (x_k - x_*))$

$$= (d_k, A^{-1}d_k) = \|d_k\|_{A^{-1}}^2.$$

D'où $$\frac{\|x_{k+1} - x_*\|_A^2}{\|x_k - x_*\|_A^2} = 1 - \frac{\|d_k\|^4}{\|d_k\|_A^2 \|d_k\|_{A^{-1}}^2}$$

3) Inégalité de Kantorovitch

↳ Si $A \in SDP_n$, $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_p$ ses vp alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on a $\|x\|_A^2 \|x\|_{A^{-1}}^2 \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4$.

Appliqué ici à d_k :

$$\frac{\|x_{k+1} - x_*\|_A^2}{\|x_k - x_*\|_A^2} \leq 1 - \frac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2} = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)^2 < 1$$

D'où $$\|x_{k+1} - x_*\|_A \leq \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \|x_k - x_*\|_A$$

et par récurrence $$\leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^{k+1} \|x_0 - x_*\|_A.$$

On conclut en remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq (Ax, x) = \|x\|_A^2 \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

soit $$\sqrt{\lambda_1} \|x\| \leq \|x\|_A \leq \sqrt{\lambda_n} \|x\|.$$

qui donne $$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}} \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}\right)^{k+1} \|x_0 - x_*\|.$$

4) Si on a le temps : preuve de Kantorovitch

cf TD n°3 matrices, exercice 1.

219

1/12/15 Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exples et applications

I) Questions

- (App2). Unicité de y ?
↳ non. Déjà dpd de la norme. Pour $\|\cdot\|_2$ par unicité.
Et pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ unicité ?
↳ non plus eg. $F = \mathbb{R}^n \setminus B(0,r)$.
- (Prop 8). Réciproque ?
Schwarz → $d^2_x f$ sym. bs de X cvxe ? ↳ non pas du tt
Dém de $d^2_x f$ sym ?
Lien entre $d^2_x f$ DP et coercivité (déf 4) ? Il y en a un ?
↳ Poly deg 4 : coercive ms pas cvxe
- (App5) Exple où on l'utilise ?
↳ Si on ne sait pas qu'un extrémum, le gdt peut dire n'impte quoi
$f(x,y) = x^4 + y^4 + Q(x,y)$ où Q de deg ≤ 3.
- (App14) (Dev1). Idée de la dém ?
- (Thm 16) Il dit quoi ?
↳ Quand on a des extrémums locaux en fonction du signe du gradient / de la diff. et de la signature de la Hessienne
Ça repose sur quoi ?
↳ Taylor (lequel ?) (hyp ?) ↙ matrice
$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x).h + \frac{1}{2}\,{}^t h\, \nabla^2 f(x)\, h + o(\|h\|^2)$

II) Exercice

$\boxed{1}$ $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P = n$ $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$ ($\exists$ ce ?)
↑ on cherche sur un cercle = compact.

Ppe du maximum !

$\underline{Mq}$ $r \mapsto \frac{M(r)}{r^n}$ ↘ $\not\nearrow$ si $P(z) = az^n$

compact ~~régulier~~ = parfait.

analyse $\mathbb{C}$, une fonc° holom. $K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ atteint son max au bord (à l'intérieur est cste) (preuve en utilisant le dev en série entière) bord

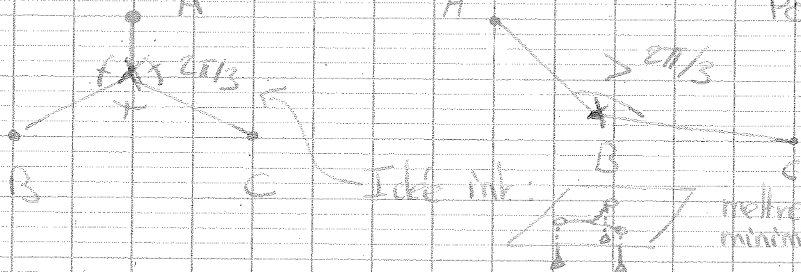
Indication : considérer $g : z \mapsto z^n P(1/z)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$M_g(r) := \max_{|z|=r} |g(z)|$ $\quad M_g(1/r) = \frac{M(r)}{r^n}$

III. Trucs divers et variés

- Exercice bulles de savon. Minimiser la distance pour relier

Point de Fermat



Idée int

mettre des masses
minimise l'én. potentielle.

- Optimisa°, algo, méthode des moindres carrés, simplexe !,
multiplicateur de Lagrange, (fonc° avec

- Géom eucl (perpendiculaire commune à 2 dtes,
dtes remarquables se coupent d. un Δ)
Lien calcul diff !!
Taylor $\Rightarrow$ caract selon le signe de ∇ et ∇^2

- Plein d'appli !

- Extrema liés, sous variétés
ex : $\Pi = \{xyz = 1\}$ mq sous-variété de $\mathbb{R}^3$

- Mettre le maximum d'exple !!

- Ppe du maximum !!
Lemme de Schwarz.

- (projections sur un Hilbert)

- Fonc° de Lyapounov $\Leftrightarrow$ stabilité.

Leçon 219, dev 2 : Billard elliptique

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Il existe à l'intérieur de $\mathcal{E}$ une trajectoire fermée à 3 rebond respectant les lois de l'optique

---

On considère $f : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(A, B, C) \longmapsto AB + BC + CA.$$

et on cherche (A, B, C) maximisant f.

1) Existence sur un ouvert particulier

$\mathcal{E}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc un compact.

$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ est donc un compact de $\mathbb{R}^6$.

De plus f est continue (on peut le voir en écrivant son expression $f(x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C)$)

f admet donc un maximum en $(A_*, B_*, C_*) \in \mathcal{E}^3$.

Dans ce cas, on remarque que A_*, B_*, C_* deux à deux disjoints. Car en effet :

* $A = B = C \rightsquigarrow f(A, B, C) = 0$ pas minimum.
* $A = B \neq C \rightsquigarrow f(A, B, C) = 2AC < AC + AB' + B'C$ pour tout $B' \notin [AC]$

On a donc $(A_*, B_*, C_*) \in \mathcal{E}^3 \setminus \{(A, B, C), A = B \text{ ou } A = C \text{ ou } B = C\}$ ouvert de $\mathcal{E}^3$ qu'on note $\mathcal{U}$.

pas maximum

2) Différentiation de f sur $\mathcal{U}$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(A, B) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2$.

et $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\psi(A, B) = \sqrt{\varphi(A, B)} = AB$.

φ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et nulle ssi $A = B$.

La fonction racine étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ on a donc que ψ est différentiable en (A,B) dès que $A \neq B$.

et de plus $D\psi(A,B) = \dfrac{D\varphi(A,B)}{2\sqrt{\varphi(A,B)}}$ $= \|\vec{AB}\|$ pdt scalaire

Or $\varphi(A+\vec{a}, B+\vec{b}) = \varphi(A,B) + 2(\vec{AB}, \vec{b}-\vec{a}) + \underbrace{\varphi(\vec{a},\vec{b})}_{= o(\|a,b\|^2)}$

donc $D\varphi(A,B)(\vec{a},\vec{b}) = 2(\vec{AB} \,|\, \vec{b}-\vec{a})$

et donc $D\psi(A,B)(\vec{a},\vec{b}) = \left(\dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \vec{b}-\vec{a}\right) = \vec{u}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

en notant $\vec{u} = \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, $\vec{v} = \dfrac{\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|}$, $\vec{w} = \dfrac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|}$.

On obtient que f est différentiable sur $\mathcal{M}$ et que $Df(A,B,C)(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{u}(\vec{b}-\vec{a}) + \vec{v}(\vec{c}-\vec{b}) + \vec{w}(\vec{a}-\vec{c})$

$f(A,B,C) = \psi(A,B) + \psi(B,C) + \psi(C,A)$

3) Théorème des extrema liés et conclusion

Supposons $f(A,B,C)$ maximum pour $(A,B,C) \in \mathcal{M}$.

Soit g définissant $\mathcal{E}$ implicitement, de classe C^1 ($g(x,y) = ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$). Alors la sous variété $\mathcal{E}^3$ s'écrit $\{(A,B,C) \in (\mathbb{R}^2)^3,\ g(A) = g(B) = g(C) = 0\}$.

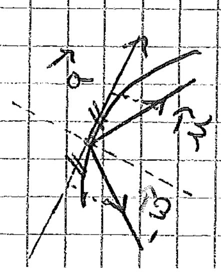
L'espace tangent à $\mathcal{E}^3$ est donc défini par

$$T_{A,B,C}\,\mathcal{E}^3 = \{(\vec{a},\vec{b},\vec{c}),\ Dg(A).\vec{a} = Dg(B)\vec{b} = Dg(C)\vec{c} = 0\}$$

Le théorème des extrema liés assure que :

$$\forall\, \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in T_{A,B,C}\,\mathcal{E}^3,\quad Df(A,B,C)(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{0}.$$

Ainsi si $\vec{a}$ est tangent à $\mathcal{E}$ on a $\vec{a}(\vec{w}-\vec{u}) = 0$ ie $\vec{a}.\vec{w} = \vec{a}.\vec{u}$. Cela correspond à une réflexion qui respecte les lois de l'optique.



En faisant la même remarque pour $(0,\vec{b},0)$ et $(0,0,\vec{c})$ on obtient que ABC est bien une trajectoire convenable.