Méthode de Monte-Carlo :

Référence : François Lavigne, *70 développements possibles pour l'agrégation de mathématiques*, Ellipses, 2018

Lemme 1. *Pour tout $t \in [-1,1]$, on a $e^t \leq 1+t+t^2$.*

Preuve : On pose $g \mapsto e^{-t}(1+t+t^2)$ sur $[-1,1]$. Alors on a $g'(t) = e^{-t}(-1+t+t^2+1+2t) = e^{-t}t(1-t)$. Ainsi g est décroissante sur $[-1,0]$ puis croissante sur $[0,1]$. On en déduit que $g(t) \geq g(0) = 1$ pour tout $t \in [-1,1]$, d'où l'inégalité annoncée.

Théorème 2. *Soit $P = [0,1]^d$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $U(P)$. Soit $g \in L^1(P)$. On note l'erreur commise par*

$$e_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i) - \int_P g(u)du.$$

Supposons $|g(x)| \leq A$ pour presque tout $x \in P$ et $\int_P g^2 \leq B$. Prenons un réel $\beta \in [0; \frac{B}{A^2}]$. Alors on a e_N converge presque sûrement vers 0 et

$$P(e_N \geq \beta A) \leq \exp(-\frac{N\beta^2A^2}{4B}).$$

Preuve : Pour le premier point, les $(g(X_i))$ sont des v.a.i.i.d. et comme X_1 est de loi uniforme sur P, par le théorème de transfert, on a $E(|f(X_1)|) = \int_P |f| < +\infty$. Ainsi, par la loi forte des grands nombres, $e_N \xrightarrow[N\to\infty]{p.s.} 0$.

Pour le deuxième point, posons $\widetilde{g} = x \mapsto g(x) - \int_P g(t)dt$ pour avoir $e_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{g}(X_i)$. On a :

— $E(\widetilde{g}(X_i)) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (théorème de transfert) ;

— $\int_P \widetilde{g}(x)^2dx = \int_P g(x)^2dx - (\int_P g(t)dt)^2 \leq B - 0 = B$.

Maintenant soit $\alpha > 0$ (que l'on fixera plus tard). Comme la fonction $x \mapsto \exp(\alpha x)$ est une bijection croissante et par l'inégalité de Markov, on a :

$$P(e_N \geq \beta A) = P(e^{\alpha e_N} \geq e^{\alpha\beta A}) \leq e^{-\alpha\beta A}E(e^{\alpha e_N}).$$

Comme les variables (X_i) sont indépendantes et de même loi, on a :

$$E := E(e^{\alpha e_N}) = E\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha}{N}\widetilde{g}(X_i)\right)\right) = \prod_{i=1}^{N} E\left(e^{\frac{\alpha}{N}\widetilde{g}(X_i)}\right) = E\left(e^{\frac{\alpha}{N}\widetilde{g}(X_1)}\right)^N.$$

Comme $|\widetilde{g}(X_1)| \leq 2A$, si $2A\alpha \leq N$, on est dans le cadre du lemme que l'on peut appliquer :

$$E \leq \left(E\left(1 + \frac{\alpha}{N}\widetilde{g}(X_1) + \frac{\alpha^2}{N^2}\widetilde{g}(X_1)^2\right)\right)^N \leq \left(1 + \frac{\alpha^2}{N^2}B\right)^N.$$

Comme exp est convexe, elle est au-dessus de ses tangentes, en particulier pour tout t, $e^t \geq 1+t$. Ainsi en appliquant cette inégalité avec ce qui précède, on a

$$P(e_N \geq \beta A) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 B}{N} - \alpha\beta A\right).$$

Or la fonction polynomiale de degré 2 $x \mapsto \frac{B}{N}x^2 - \alpha\beta A$ est minimisé pour $\alpha_m := \frac{N\beta A}{2B}$. On obtient alors l'inégalité voulue avec $\alpha = \alpha_m$.
De plus, comme $\beta \in [0, \frac{B}{A^2}]$, on a que $\frac{2A\alpha_m}{N} = \frac{\beta A^2}{B} \leq 1$ (ce qui permet de rentrer dans les hypothèses du lemme).

Remarque 3. *En étudiant la suite $(-X_n)$, on en déduit que*

$$P(|e_N| \geq \beta A) \leq 2\exp(-\frac{N\beta^2A^2}{4B}).$$