Pour les références, développements, etc aller sur florian.lavigne@wordpress.fr

N°217

NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

Autre sujet :

Ici $n \in \mathbb{N}^*$, et U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

I - Définitions

A) Rappel sur l'inversion locale

Rap 1: (Théorème d'inversion locale)
Soit f de classe C^k $(k \geq 1)$ de U dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$ pour df_a inversible. Alors il existe $V \subseteq U$ voisinage ouvert de a tel que $f : V \to f(V)$ soit un C^k-difféomorphisme.

Appli 2: $\exists\, U, V \subset GL_n(\mathbb{R})$ avec $I_n \in U \cap V$, $\forall B \in V, \exists!\, A \in U,\ A^2 = B$

Déf 3: Un difféomorphisme local est une application de classe C^k $(k \geq 1)$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ avec sa différentielle inversible en tout point.

Ex 4: $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféo. local de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

B) Immersion et submersion

Th 5: Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ de classe C^1 pour $q \in \mathbb{N}^*$. On suppose $0 \in U$ et que df_0 est injective. Alors il existe un ouvert $0 \in V$ de $\mathbb{R}^q$, un ouvert $U' \subseteq U$ et un difféo. local $\varphi : V \to f(V)$ avec :
(i) $f(U') \subseteq V$ et $\varphi \circ f(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$

Appli 6: On peut transformer tout morceau suffisamment petit d'une courbe en segment de droite par un difféo.

Th 7: Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ de classe C^1, avec $q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in U$ et que df_0 est surjective. Alors il existe un ouvert de $\mathbb{R}^n$ noté $0 \in V$, et $\psi : V \to f(V)$ un difféo. tel que $\psi(V) \subseteq U$ et $f \circ \psi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^q)$.

Déf 8: Une immersion (resp. submersion) de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^q$ est une application de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est injective (resp. surjective)

Rq 9: Si $f : U \to \mathbb{R}^q$ est une immersion (resp. submersion), alors $n \leq q$ (resp. $n \geq q$)

Rq 10: Une application qui est une immersion et une submersion est un difféo. local.

C) Sous-variétés

Déf 11: Une partie $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in M$, il existe des voisinages ouverts U et V de x et 0 dans $\mathbb{R}^n$ respectivement et $f : U \to V$ difféo tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$
On dit alors que M est de codimension $n-p$ dans $\mathbb{R}^n$

Ex 12: Un sous-espace affine d'un espace affine est une sous-variété de cet espace affine

Th 13: Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. LASSE :
(i) M est une sous-variété de dimension p $\in \mathbb{R}^n$
(ii) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert $a \in U$ de $\mathbb{R}^n$ et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$
(iii) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et une immersion $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est aussi un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$

(iv) $\forall a \in M$, $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant a, $V \subset \mathbb{R}^p$ contenant $(a^1, \dots, a^p)$ et une application lisse G de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tels que $U \cap M$ soit le graphe de G (après permutation éventuelle des coordonnées.

Ex14: La sphère S^n est une sous variété de dimension n de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ex15: Le tore $\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, |z_1|^2 = \dots = |z_n|^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{C}^n \neq \mathbb{R}^{2n}$.

D) Paramétrisation

Déf16: Une paramétrisation d'une sous-variété de M de dimension p de $\mathbb{R}^n$ est une application d'un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur un ouvert de M.

Ex17: $\begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos t, \sin t) \end{matrix}$ est une paramétrisation locale du cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Ex18: $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v) \end{matrix}$ paramétrise localement $\mathbb{T}^2$.

II- Notion de tangence

A) Espace tangent

Notation 19: Soit M sous-variété de dimension p dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in M$. On note $C_a(M)$ l'ensemble des arcs paramétrés γ, de classe C^1, tracés sur M et passant par a.

Déf20: L'espace tangent en a à M est l'ensemble

$$T_a M = \{\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n, \ \gamma \in C_a(M)\}.$$

Ex21: Si M est un ouvert d'un s.e.a. A de $\mathbb{R}^n$, alors M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $T_a M = \vec{A}$.

Prop22: $T_a(M)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension p la dimension de M. Précisément:

(i) si g est une submersion avec $M \cap U = g^{-1}(0)$, alors $T_a(M) = \operatorname{Ker}(dg_a)$.

(ii) si h est une immersion avec $U \cap M = h(\Omega)$, alors $T_a(M) = \operatorname{Im}(dh_a)$

(iii) si $U \cap M$ est le graphe de G lisse, alors $T_a(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, \ y = DG_a(x)\}$.

Ex23: $T_{(0,1)} S^1 = \operatorname{Vect}(1,0)$.

B) Espace tangent affine

Déf24: Soit M sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $a \in M$. L'espace tangent affine en a à M
$\mathcal{T}_a M = a + T_a M$.

Rq25: L'espace tangent affine est le sous-espace affine qui approxime le mieux M au voisinage de a.

Th26: (Morse)

Soit $f: U \to \mathbb{R}$ fonction lisse avec $0 \in U$, $df_0 = 0$ et $\operatorname{Hess}(f) = (\partial^2_{ij} f(0))$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un difféomorphisme Φ d'un sous-ouvert contenant 0 sur un autre tel que:

$$f \circ \Phi^{-1}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2$$

Appli27: Soit S surface de $\mathbb{R}^3$ (sous-variété de dimension 2). Alors S est d'un même côté du plan tangent affine en 0 si $\operatorname{Hess}(G)$ est de signature +/+ ou -/-. Sinon S traverse $\mathcal{T}_0 S$. [cf annexe].

C) Transversalité

Ici, M_1 et M_2 sont deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

N°217

3/4

Déf 28: On dit que M_1 et M_2 sont transverses, noté $M_1 \pitchfork M_2$ si : $\forall a \in M_1 \cap M_2$, $T_aM_1 + T_aM_2 = \mathbb{R}^n$

Rq 29: Si $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, alors $M_1 \pitchfork M_2$.

Ex 30: [cf annexe].

Cex 31: M et $T_a M$ ne sont jamais transverses.

Prop 32: Si $M_1 \pitchfork M_2$, alors $M_1 \cap M_2$ est une sous-variété. De plus

(i) $\mathrm{codim}(M_1 \cap M_2) = \mathrm{codim}(M_1) + \mathrm{codim}(M_2)$

(ii) $T_a(M_1 \cap M_2) = T_a(M_1) \cap T_a(M_2)$.

III - Exemples fondamentaux.

A) Surface de révolution

Déf 33: Une surface paramétrée par $\sigma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin(v), g(u))$ avec $f>0$ et $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ est dite de révolution [cf annexe]

Déf 34: Une courbe γ sur une surface S est une géodésique si :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E\dot\gamma_1 + F\dot\gamma_2) = \frac{1}{2}\left[E_x\dot\gamma_1^2 + 2F_x\dot\gamma_1\dot\gamma_2 + G_x\dot\gamma_2^2\right] \\ \frac{d}{dt}(F\dot\gamma_1 + G\dot\gamma_2) = \frac{1}{2}\left[E_y\dot\gamma_1^2 + 2F_y\dot\gamma_1\dot\gamma_2 + G_y\dot\gamma_2^2\right] \end{cases}$$

pour $E = \|\gamma_x\|^2$, $F = \langle \gamma_x, \gamma_y \rangle$, $G = \|\gamma_y\|^2$.

Prop 35: (admise) Toute géodésique a une vitesse constante

Prop 36: Tout méridien d'une surface de révolution est une géodésique

Prop 37: Une parallèle $u = u_0$ est une géodésique d'une surface de révolution ssi $f'(u_0) = 0$.

Th 38: (Clairaut)
Soit γ une courbe de vitesse 1 sur une surface de révolution S et $\rho : S \to \mathbb{R}$ la distance d'un point de S à l'axe de rotation. Soit ψ l'angle entre γ et les méridiens de S. Si γ est une géodésique alors $\rho \sin\psi = \text{cste}$. Réciproquement, si $\rho\sin\psi$ est constant sur γ, et si γ n'a pas de portée commune avec une parallèle de S, alors γ est une géodésique.

DV1

DV1

B) Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$

Lemme 39: Soit $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $\left(e^{\frac{X}{n}} e^{\frac{Y}{n}}\right)^n \to e^{X+Y}$ et $\left(\exp\left(\frac{X}{n}\right)\exp\left(\frac{Y}{n}\right)\exp\left(-\frac{X}{n}\right)\exp\left(-\frac{Y}{n}\right)\right)^{n^2} \to \exp[XY - YX]$

Prop Déf 40: Soit $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ fermé. Posons $\mathrm{Lie}(G) = \{X \in M_n(\mathbb{R}), \exp(tX) \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Alors $\mathrm{Lie}(G)$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ stable par $(X,Y) \mapsto XY - YX$.
On l'appelle l'algèbre de Lie du groupe G

Rq 41: $0 \in \mathrm{Lie}(G)$.

Dans la suite, on considère $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ non discret et fermé.

Lemme 42: Soit $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ avec $h_k \to I_n$, $h_k \neq I_n$.
Si h est valeur d'adhérence de $\frac{\mathrm{Log}\, h_n}{\|\mathrm{Log}\, h_n\|}$, alors $h \in \mathrm{Lie}(G)$

Lemme 43: Soit $\mathcal{G}'$ supplémentaire de $\mathrm{Lie}(G)$ dans $M_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage W_0 de 0 dans $\mathcal{G}'$ noté V', avec $\exp(V') \cap G = \{I_n\}$.

Th 44: (Von Neumann)
Si $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ fermé, il existe un voisinage V de 0 dans $\mathrm{Lie}(G)$, un voisinage W de I_n dans G, avec $\exp$ réalisant un homéomorphisme entre V et W.

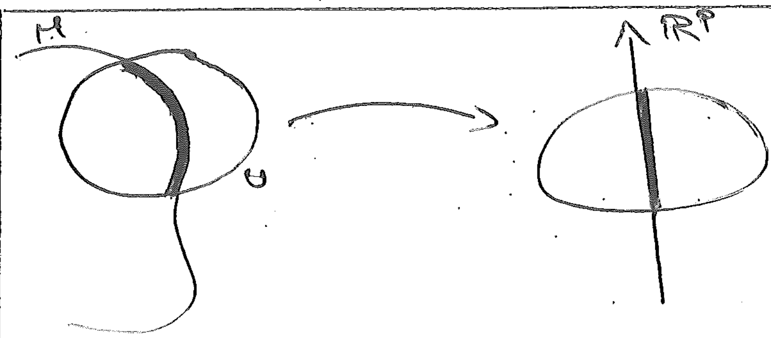
Applic 45: Un sous groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dim(\mathrm{Lie}(G))$ avec $T_{I_n}(G) = \mathrm{Lie}(G)$.

Ex 46: [cf annexe].

DV2

N°217

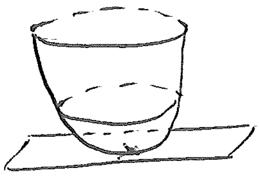
Annexes



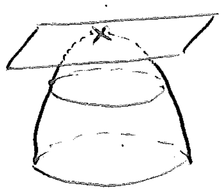
$f(U) = V$

Annexe 1 : Sous-variété

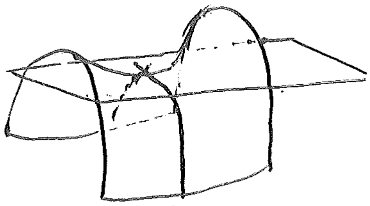
Annexe 2 :



+/+
Minimum

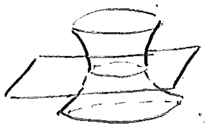


−/−
Maximum



+/−
Point selle

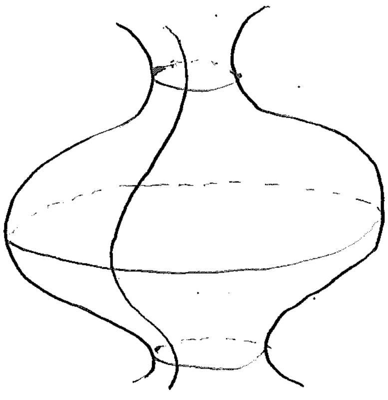
Annexe 3 : Transversalité.

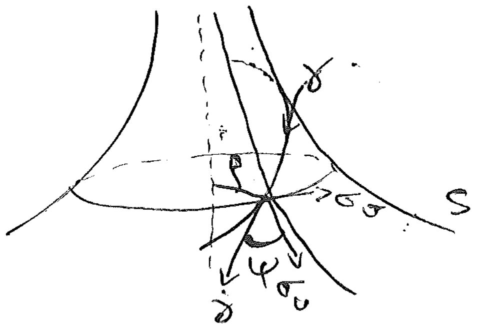


Deux surfaces de $\mathbb{R}^3$

Une courbe et une surface de $\mathbb{R}^3$.

Annexe 4 : Surface de révolution





Annexe 5 :

G	Lie (G)	dimension
$GL_n(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	n^2
$O_n(\mathbb{R})$	$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$SO_n(\mathbb{R})$	$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$SL_n(\mathbb{R})$	$sl_n(\mathbb{R})$	n^2-1

avec $O_n(\mathbb{R}) = \{M,\ {}^tMM = I_n\}$

$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$

$sl_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$