Dev 23 - Lemme et critère de Borel-Cantelli (Analyse)

Lem: Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements d'une m̂ tribu. Alors:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty \implies P(\limsup_n A_n) = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty \\ \text{Les } A_n \text{ sont } \perp\!\!\!\perp \end{array}\right\} \implies P(\limsup_n A_n) = 1$

Prop: Soient $X_n, X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ des v.a.r^d (n parcourt $\mathbb{N}$). Alors:

a) $\left(\forall \varepsilon > 0, \ \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty\right) \implies X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$

b) Ici, supposons de plus que les X_n sont $\perp\!\!\!\perp$. Alors:

$\left(\forall \varepsilon > 0, \ \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < +\infty\right) \iff X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$

Preuve lemme:

(car $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$)

a) On a $0 \leq P(\limsup_n A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p}_{\text{(suite décroissante en } n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} P(A_p) = 0$

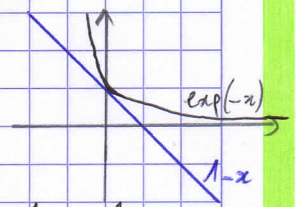
b) On a $P(\limsup_n A_n) = 1 - P(\liminf_n A_n^c)$, mais:

(suite décroissante en q)

$$P(\liminf_n A_n^c) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\bigcap_{p=n}^{+\infty} A_p^c}_{\text{(suite croissante en } n)}\right) = \boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{p=n}^{+\infty} A_p^c\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{q=n}^{+\infty} \bigcap_{p=n}^{q} A_p^c\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} P\left(\bigcap_{p=n}^{q} A_p^c\right) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} \prod_{p=n}^{q} P(A_p^c) = \lim_n \lim_q \prod_{p=n}^{q} (1 - P(A_p))$$

(car les A_n^c sont $\perp\!\!\!\perp$)



$$\leq \lim_n \lim_q \prod_{p=n}^{q} \exp(-P(A_p)) \quad \text{car } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ 1 - x \leq \exp(-x)}$$

$$= \lim_n \lim_q \exp\left(-\sum_{p=n}^{q} P(A_p)\right) = \lim_n \exp\left(-\lim_q \sum_{p=n}^{q} P(A_p)\right) \quad \text{car continuité de exp}$$

$$= \lim_n \exp\left(-\underbrace{\sum_{p=n}^{+\infty} P(A_p)}_{=+\infty}\right) = \lim_n 0 = 0$$

Ainsi $P(\liminf_n A_n^c) = 0$, donc $P(\limsup_n A_n) = 1 - 0 = 1$.

Preuve proposition:

a) Par le 1er lemme de Borel-Cantelli, on a, $\forall \varepsilon > 0$, $P(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$

D'où $0 \leq P\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} P(\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$

($\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable)

Ainsi $\boxed{P\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } P\Big(\underbrace{\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \liminf_n \{|X_n - X| \le \varepsilon\}}_{=: C}\Big) = 1}$$

Mais $C = \{\omega \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \ |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\}$

$= \{\omega \mid \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \ |X_n(\omega) - X(\omega)| \le \varepsilon\}$ par densité de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$

$= \{\omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\} = \{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X\}$

D'où $P(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X) = 1$, càd $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} X$

b) • "$\Rightarrow$" Déjà fait ci-dessus, en remplaçant X par 0.

• "$\Leftarrow$" Supposons que $X_n \xrightarrow{p.s} 0$. On veut mq $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < +\infty$

$$\boxed{\text{D'après ce qui est écrit ci-dessus, on a } P\Big(\bigcap_{\varepsilon>0} \liminf_n \{|X_n| \le \varepsilon\}\Big) = 1}$$

D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $P(\liminf_n \{|X_n| \le \varepsilon\}) = 1$

Càd $\forall \varepsilon > 0$, $P(\limsup_n \{|X_n| > \varepsilon\}) = 0$

D'où, $\forall \varepsilon > 0$, $P(\limsup_n \{|X_n| > \varepsilon\}) \neq 1$

Ainsi, par contraposition du $\underbrace{\text{2nd lemme de Borel-Cantelli}}$, on a : $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{|X_n| > \varepsilon\}) < +\infty$

(car les événements $\{|X_n| > \varepsilon\}$ sont $\perp\!\!\!\perp$ par $\perp\!\!\!\perp$ des X_n)

Commentaires additionnels :

- Les lemmes de Borel-Cantelli sont un exemple d'illustration de la loi du 0-1, bien que leurs preuves n'utilisent pas la loi du 0-1.

- Sans l'hypothèse d'indépendance, le 2^{nd} lemme de Borel-Cantelli est faux :

  Par exemple, prenons $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$ et $A_n =]0, \frac{1}{n}]$.

  On a $\begin{cases} \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{p=n}^{+\infty}]0, \frac{1}{p}] = \bigcap_{n=0}^{+\infty}]0, \frac{1}{n}] = \emptyset \text{, d'où } P(\limsup_n A_n) = 0 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum \frac{1}{n} = +\infty \end{cases}$

- Sans l'hypothèse d'indépendance, le 2^{nd} critère de Borel-Cantelli, et plus précisément le sens réciproque, est faux :

  Par exemple, prenons $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$ et $X_n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}[}$

  On a $\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} P(|X_n| > \frac{1}{42}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \\ X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \end{cases}$

Résultats intermédiaires

- Propriétés de base sur les mesures