201

Espaces de fonctions. Exemples et Applications.

I - Fonctions continues

1) Fonctions continues et convergence

Soient X un ensemble, $(E, \|.\|)$ un espace normé, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $X \to E$.

Déf 1 On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (CVS) sur X vers $f: X \to E$ si : $\forall x \in X, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Déf 2 On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (CVU) sur X vers $f: X \to E$ si : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Prop 3 CVU $\Rightarrow$ CVS

Ex 4 Si $X = [0,1[$, $E = \mathbb{R}$ et $f_n : x \mapsto x^n$; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers 0, mais il y a pas CVU.

Thm 5 On suppose : (1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue
(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur X vers $f: X \to E$
Alors : f est continue sur X.

Rmq 6 La CVU est essentielle : si $X = \mathbb{R}_+$, $E = \mathbb{R}$ et $f_n : x \mapsto e^{-nx}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers δ_0, non continue

Thm 7 Soient $f: X \to E$, $a \in X$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
On suppose : (1) E complet
(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur X vers f
(3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$
Alors : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $b\in E$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$.

Prop 8 $(\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

2) Fonctions continues sur un compact

Prop 9 Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques avec (E,d) compact. Si $f: E \to F$ est continue, alors $f(E)$ est compact.

Rq 10 Faux pour l'image réciproque : $\sin^{-1}(\underbrace{[-1,1]}_{\text{compact}}) = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{non compact}}$ compact

Coro 11 Soient (E,d) métrique compact et $f: (E,d) \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Thm 12 (1er thm de Dini) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions réelles continues définies sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers $f: I \to \mathbb{R}$ continue, alors il y a CVU.

Thm 13 (Heine) Soient (E,d) et (F,δ) espaces métriques avec (E,d) compact. Si $f: E \to F$ est continue, alors f est uniformément continue.

Appli 14 (2nd thm de Dini) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles continues définies sur $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers $f: I \to \mathbb{R}$ continue, alors il y a CVU.

Déf 15 Soient X un espace métrique compact et $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. On dit que $\mathcal{F}$ est : (1) équicontinue si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall f \in \mathcal{F}, d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
(2) relativement compacte si $\overline{\mathcal{F}}$ est compact.

Thm 16 (Ascoli) Soient X un espace métrique compact et $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte si et seulement si $\mathcal{F}$ est bornée équicontinue.

3) Théorèmes de densité

Soient K un espace compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$

Déf 17 On dit que A sépare les points de K si : $\forall x \neq y \in K, \quad \exists f \in A / \ f(x) \neq f(y)$.

Thm 18 (Stone - Weierstrass) On suppose que A sépare les points de K et $\mathbb{1} \in A$. Alors : A est dense dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Coro 19 (Weierstrass) Si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors $\mathcal{P}(K,\mathbb{R})$ est dense dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Appli 20 Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall n \in\mathbb{N}, \ \int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$. Alors $f = 0$.

II - Espaces L^p

1) Définitions et propriétés

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$.

Déf 21 Soit $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable et $p \in [1, +\infty[$. On pose $N_p(f) = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Déf 22 On note $\mathcal{L}^p(\mu)$ (ou $\mathcal{L}^p$) l'ensemble des $f : X \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $N_p(f) < \infty$.

Prop 23 $\mathcal{L}^p$ est un EV, et N_p est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.

Déf 24 On note $L^p(\mu)$ (ou L^p) l'espace $\mathcal{L}^p/\sim$, où $\sim$ est défini par : $f \sim g \iff f = g$ μ-pp.

Prop 25 L^p est un EV normé, et N_p est une norme sur L^p, notée $\|.\|_p$.

Prop 26 (inégalité de Hölder) Si $p > 1$ et q est l'exposant conjugué de p, alors $\forall f \in L^p$, $\forall g \in L^q$, $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Prop 27 (inégalité de Minkowski) $\forall f, g \in L^p$,
$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Thm 28 (Riesz - Fisher) (1) $(L^p, \|.\|_p)$ est complet
(2) Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans L^p, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ qui CVS μ-pp vers f.

Coro 29 L^2 muni de $\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu$ est un Hilbert

Thm 30 L'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $(L^p, \|.\|_p)$

Prop 31 Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda_d(B) < \infty$. Alors $\forall p < q \in [1, +\infty[$, $L^\infty(B) \subset L^q(B) \subset L^p(B) \subset L^1(B)$.

Rmq 32 Si $\lambda_d(B) = +\infty$, les inclusions ne sont plus vraies.

2) Convolution et régularisation

On se place sur $X = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

Déf 33 On dit que $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(x-t)g(t) \in L^1$. Le produit de convolution est alors défini par
$f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) g(t)\, dt$.

Thm 34 (Conditions d'existence)
(1) Si $f, g \in L^1$, alors f et g sont convolables, $f * g \in L^1$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
(2) Si $f \in L^1$ et $g \in L^p$ $(p < \infty)$, alors f et g sont convolables, $f*g \in L^p$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$
(3) Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ (avec p et q conjugués), alors f et g sont convolables, $f*g$ est bornée uniformément continue, et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Déf 35 Une suite $(\rho_j)_{j\geq 1}$ est une suite régularisante si :
(1) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\rho_j \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\rho_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_j = 1$
(2) $\exists (\varepsilon_j)_{j\geq 1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $\varepsilon_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$ et : $\forall j \geq 1$, $\mathrm{supp}(\rho_j) \subset B(0, \varepsilon_j)$

Thm 36 Soit $1 \leq p < \infty$ et $(\rho_j)_{j\geq 1}$ une suite régularisante.
(1) Si $f \in L^p$, alors : $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $f * \rho_j \in L^p \cap \mathcal{C}_c^\infty$ et $\|f * \rho_j - f\|_p \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$
(2) Si f est continue, alors : $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $f * \rho_j \in \mathcal{C}_c^\infty$ et : $\forall K \subset \mathbb{R}^d$ compact, $\|f * \rho_j - f\|_{\infty, K} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$.

Coro 37 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p.

3) Transformation de Fourier L^1

On se place sur $X = \mathbb{R}^d$

Déf 38 Si $f \in L^1$, on note $\hat{f} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \end{array}$ la transformée de Fourier de f.

Développement 1

Lemme 39 (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1$, $\hat{f}$ existe et $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\|\xi\| \to +\infty]{} 0$.

Prop 40 Soient $f \in L^1$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On note $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$.
Alors : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \hat{f}(\xi)$.

Prop 41 Soit $f, g \in L^1$. Alors : $\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\hat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u)g(u)du$

Prop 42 Soit $f, g \in L^1$. Alors : $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Lemme 43 Soient $s > 0$ et $\gamma_s : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}^d \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2s}\right)$
Alors $\hat{\gamma_s} = \left(\frac{2\pi}{s}\right)^{d/2} \gamma_{\frac{1}{s}}$.

Thm 44 Si $f \in L^1$ avec $\hat{f} \in L^1$, alors $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d f \sigma$.

Appli 45 Si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy de paramètre 1, alors $\varphi_X : t \mapsto e^{-|t|}$.

III - Fonctions holomorphes

1) Définitions, propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Déf 46 Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe sur Ω si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.
On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω

Prop 47 (formule de Cauchy) Soit γ un chemin fermé dans Ω, supposé convexe. Soient $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}\gamma$ et $f \in H(\Omega)$
Alors : $f(z)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Thm 48 Une fonction holomorphe est analytique.

Prop 49 (inégalités de Cauchy) Soit $R > 0$ et $f \in H(D(0,R))$, et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement en série entière
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) r^{-n} e^{-int} dt$ et :
$(\forall r \in]0, R[)$ $|a_n| \leq \frac{\sup\{|f(z)|, |z| = r\}}{r^n}$.

2) L'espace $H(\Omega)$

Déf 50 Une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts de Ω est dite exhaustive si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, et $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega$.

Prop 51 Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de Ω et K est un compact de Ω, alors : $\exists m \in \mathbb{N}$ / $K \subset K_m$.

Déf 52 On munit $\mathcal{C}(\Omega)$ de la topologie dont une base de voisinages d'un élément $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ est $(O_{K,\varepsilon}(f))_{K \subset \Omega \text{ compact}, \varepsilon > 0}$, où $O_{K,\varepsilon}(f) = \{g \in \mathcal{C}(\Omega), \sup_K |g - f| < \varepsilon\}$
ie : $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$ si : $\forall K \subset \Omega$ compact, $\sup_K |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Rmq 53 Cette topologie est métrisable : par exemple, si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de Ω, elle est associée à la distance $(f, g) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \sup_{K_n} |f - g|)$

Thm 54 $\mathcal{C}(\Omega)$ est complet pour cette topologie, et $H(\Omega)$ est une partie fermée, donc complète, de $\mathcal{C}(\Omega)$.

3) L'espace de Bergman

Déf 55 Soit D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. L'espace de Bergman est défini par : $La^2 = H(D_1) \cap L^2(D_1)$

Déf 56 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$

Lemme 57 Soit $f \in La^2$ et $K \subset D_1$ compact. Alors
$\max_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K, \partial D_1)} \|f\|_2^2$.

Thm 58 (1) $(La^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert
(2) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de La^2

Développement 2

<u>Références</u>

- Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani
- Analyse, Gourdon
- Cours d'analyse fonctionnelle, Li
- Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani
- Analyse complexe, Amar et Matheron
- Analyse pour l'agrégation : 40 développements, Bernis