3.13 Paul-Lévy, théorème central limite et applications

Leçons : 250, 261, 262, 265, 266.

Références : [GK].

Prérequis : transformation de Fourier, fonction caractéristique, formule de Taylor, lemme de Slutsky. Pour l'application 1 : loi Gamma. Pour l'application 2 : estimateurs, intervalles de confiance.

Définition : $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X$ si : pour toute fonction f continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.

Lemmes (admis) :

1. $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X \Leftrightarrow$ pour toute fonction f continue à support compact, $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.
2. Si $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, alors $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^z$.

Théorème (Paul-Lévy) : $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X$ si et seulement si la suite de fonctions $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X sur $\mathbb{R}$.

Théorème (TCL) : Soit $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires réelles i.i.d. admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance commune, σ^2 la variance commune et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Alors

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0,1).$$

Application 1 : Formule de Stirling.

Application 2 : Intervalle de confiance pour le paramètre d'un n-échantillon d'une loi de Poisson.

Remarque : On ne peut pas présenter tous les résultats démontrés ici, il faut choisir les résultats que l'on démontre en fonction de la leçon. Voir le [ZQ] pour les résultats admis.

Preuve théorème de Paul-Lévy. On suppose $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f_t : x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée, donc $\mathbb{E}[f_t(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f_t(X)]$, c'est-à-dire $\varphi_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_X(t)$.

Inversement, on suppose que $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X. Soit f une fonction continue à support compact.

- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (l'espace de Schwartz), donc par bijectivité de la transformée de Fourier, il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $f = \hat{g}$. Alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-itX_n} g(t)\mathrm{d}t\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-itX_n}] g(t)\mathrm{d}t,$$

  d'après le théorème de Fubini. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[e^{-itX_n}] = \varphi_{X_n}(-t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_X(-t) = \mathbb{E}[e^{-itX}]$, et $|\mathbb{E}[e^{-itX_n}]g(t)| \leqslant |g(t)|$ avec $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, donc par convergence dominée : $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.
- Dans le cas général, si $\varepsilon > 0$, par densité il existe une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact tel que $\|f-h\|_\infty \leqslant \varepsilon$, alors :

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\leqslant |\mathbb{E}[f(X_n) - h(X_n)]| + |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]| + |\mathbb{E}[h(X) - f(X)]| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]|,\end{aligned}$$

  d'où $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$ d'après ce qui précède, puis $X_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X$ d'après le lemme 1.

□

Preuve TCL. Quitte à centrer réduire, on peut supposer que $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$. D'après le théorème de Paul-Lévy, il suffit de montrer que la suite de fonctions $(\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}})_n$ converge simplement vers $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)} : t \mapsto e^{-t^2/2}$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$, par indépendance on a :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\frac{X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

La variable X_1 admet un moment d'ordre 2, donc la fonction φ_{X_1} est de classe $\mathcal{C}^2$ et d'après la formule de Taylor,

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(\varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2n}\varphi''_{X_1}(0) + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n,$$

où $\varepsilon_n \in \mathbb{C} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\varphi_{X_1}(0) = 1$, $\varphi'_{X_1}(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ et $\varphi_{X_1}(0)''(0) = -\mathbb{E}[X_1^2] = -1$, d'où

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2/2},$$

d'après le lemme 2. D'où $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0,1)$.

□

Preuve application 1. On considère $(X_n)_n$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} X_k$. Alors d'après le théorème central limite,

$$\frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0,1).$$

Or $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le lemme de Slutsky,

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - (n+1)}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0,1).$$

On calcule alors $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$, où f_n est la densité de $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$, de deux manières différentes :

1. On utilise ce qui précède, la convergence en loi étant équivalente à la convergence simple des fonctions de répartition au points de continuité de la fonction de répartition limite, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

2. On utilise la loi Gamma, puisque $\mathcal{E}(1) \sim \Gamma(1,1)$, on a : $S_n \sim \Gamma(n+1,1)$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sqrt{n} f_{S_n}(\sqrt{n}t + n)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 (\sqrt{n}t + n)^n e^{-(n+t\sqrt{n})} 1_{t \geqslant -\sqrt{n}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^1 \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-t\sqrt{n}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

avec $\int_0^1 \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-t\sqrt{n}}\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ par convergence dominée, donc par unicité de la limite on déduit

$$\frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

d'où la formule de Stirling.

□

Preuve application 2. On considère des VA $(X_n)_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ est à estimer. On note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. D'après le théorème central limite, on a

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda}}(\overline{X_n} - \lambda) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0,1).$$

Or, d'après la loi des grands nombres, $\overline{X_n}$ est un estimateur fortement consistant de λ et par stabilité de la convergence presque sûre par les fonctions continues, $\sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X_n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{ps} 1$, donc en particulier $\sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X_n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1$. Ainsi, d'après le lemme de Slutsky,

$$\sqrt{\frac{n}{\overline{X_n}}}(\overline{X_n}-\lambda) = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}(\overline{X_n}-\lambda)\sqrt{\frac{\lambda}{\overline{X_n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi, si $\alpha \in]0,1[$, et q est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors on a

$$\mathbb{P}\left(-q \leqslant \sqrt{\frac{n}{\overline{X_n}}}(\overline{X_n}-\lambda) \leqslant q\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha,$$

ce qui donne l'intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour λ :

$$\left[\overline{X_n} \pm q\sqrt{\frac{\overline{X_n}}{n}}\right]$$

□

Questions :

1. Est-ce-que convergence en loi implique convergence en probabilité en général ?
2. Pourquoi a-t-on besoin du lemme 2 ?

Réponses :

1. Non, on a l'implication si la limite est constante.
2. Pour éviter le recours au log complexe.