NOM : MICHAUD Prénom : Robin Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples (217)

Autre sujet :

Références : Poly : Viterbo, Paulin. Livres : Avez, Rouvière, Laudenbach
DV : FGN, Gonnord-Tosel

I - Sous-variétés, exemples

1. Définition par redressement

Définition 1 : Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tel que $0 \in V$ et $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ où $p \leq n$.

Proposition 2 : L'entier p ci-dessus est la dimension de M au point x. Si M est connexe, cette dimension est la même pour tout $x \in M$

Exemple 3 : La sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.

Exemple 4 : Les seules sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$ sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$

Contre exemple 5 : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$

Proposition 6 : Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme $\varphi(M)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$.

2. Définitions équivalentes

Théorème 7 : (Inversion locale) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Si $d\varphi(x_0)$ est inversible en un point $x_0 \in U$, alors il existe $U' \subset U$ ouvert tel que $\varphi_{|U'}$ soit un C^k-difféomorphisme sur son image

Théorème 8 : (Fonctions implicites) Soient $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \times V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. On suppose qu'il existe $(x_0, y_0) \in U \times V$ tels que $f(x_0, y_0) = 0$ et $d_y f(x_0, y_0)$ inversible dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors il existe des voisinages U' et V' de x_0 et y_0 et une application $\varphi : U' \to V'$ de classe C^k telle que

$$\forall (x,y) \in U' \times V',\ f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

On peut déduire de ces deux théorèmes l'équivalence suivante :

Théorème 9 : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$ et $p \leq n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une carte locale en a (comme dans la définition 1)

(ii) Il existe un voisinage W de a dans $\mathbb{R}^n$ et $F : W \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $dF(a)$ est surjective et $W \cap M = F^{-1}(\{0\})$ (déf. implicite)

(iii) Il existe une application linéaire $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et une application C^k $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $W \cap M = W \cap \{A(z, f(z)) \mid z \in \mathbb{R}^p\}$ (définition par graphe)

(iv) Il existe $U \subset \mathbb{R}^p$ voisinage de 0, et $j : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k telle que

- $j(0) = a$
- $dj(0)$ est injective
- j est une bijection bicontinue sur son image : $j : U \to W \cap M$ (Définition paramétrique)

Exemple 10 : $\cdot$ $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1

Exemple 11 : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$: $O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(0)$ avec $F(M) = {}^tMM - Id$, $F : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$

Exemple 12 : ~~Le~~ tore T^2 est une sous variété via la paramétrisation $(\theta, \varphi) \mapsto ((R + r\cos(\varphi))\cdot\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi)$

Application 13 : Si $U \subset \mathbb{R}^p$ et $j : U \to \mathbb{R}^n$ est C^k, $dj(x)$ injectif $\forall x \in U$, ~~dj~~ j est injectif et j est propre, alors $j(U)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$. (plongement)

Contre exemple 14 : Si on enlève une de ces conditions : voir contre exemple en annexe.

Théorème (du rang constant) 15 : Soient $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to V$ de classe C^k $k \geq 1$ telle que df est de rang constant r sur U. Alors pour $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0)$, il existe U' et V' des voisinages de x_0 et y_0 et ρ et σ des difféomorphismes locaux sur U' et V' tels que

$$\sigma \circ f \circ \rho(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

Corollaire 16 : Si $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ dont ~~rang~~ la différentielle df est de rang constant sur U, alors $\forall b \in f(U)$ $f^{-1}(b)$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$

Corollaire 17 : (forme normale des immersions) Si $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^n$ et $j : U \to V$ est une application C^k telle que $dj(x_0)$ est injective, alors il existe U', V' voisinages de x_0 et $j(x_0)$, $\rho \in C^k(U'; U')$, $\sigma \in C^k(V'; V')$ tels que

$$\sigma \circ j \circ \rho(x_1, \dots x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$$

Corollaire 18 : Si $F : U \to V$ est C^k telle que $dF(x_0)$ est surjective, il existe un paramétrage local ρ, σ tel que $\sigma \circ F \circ \rho(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_n)$

Remarque 19 : Les corollaires 17 et 18 découlent du fait que le rang est semi-continu inférieurement

Exemple 20 : $O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(0)$ avec $F(M) = {}^tMM - Id$, $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$

II - Espace tangent

Définition 21 : Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous variété, et $x \in M$, on appelle espace tangent à M en $x \in M$ l'ensemble

$$\{\gamma'(0) \mid \gamma : [-1, 1] \to M \ C^1, \ \gamma(0) = x\}$$

On le note T_xM

Proposition 22 : Si $x \in U$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est une carte locale en x, $T_xM = d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$. C'est donc un espace vectoriel de dimension la dimension de M.

Proposition 23 : En gardant les notations du théorème 9, on a :

- Si M est défini implicitement au voisinage de x

$$T_xM = \ker dF(x)$$

- Si M est défini par graphe, T_xM est le graphe de df
- Si M est défini paramétriquement,

$$T_xM = dj(0)\cdot\mathbb{R}^p$$

Application 24 : Existence d'une trajectoire à n rebonds sur un billard compact convexe à bord C^∞. DV1

Définition 25 : Le sous espace affine tangent est $x + T_xM$

Exemple 26 : Si $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $T_xM = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x\rangle = 0\}$

Définition 27 : Si M_1 et M_2 sont deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, on dit que M_1 et M_2 sont transverses, et on note $M_1 \pitchfork M_2$, si $\forall x \in M_1 \cap M_2$, $T_xM_1 + T_xM_2 = \mathbb{R}^n$

Remarque 28 : Si $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, alors $M_1 \pitchfork M_2$

__Exemple 29__ : Deux droites non confondues de $\mathbb{R}^2$ sont transverses
Deux plans non confondus de $\mathbb{R}^3$ sont transverses

__Proposition 30 :__ Si M_1 et M_2 sont transverses, alors $M_1 \cap M_2$ est une sous variétés de dimension $\dim M_1 + \dim M_2 - n$

III - Fonctions différentiables sur une sous-variété.

__Définition 31__ : Si $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ sont des sous-variétés, On dit que $f : M_1 \to M_2$ est C^k si dans toute carte locale (U,φ), $f\circ\varphi^{-1}$ est C^k. or M_1, M_2 de reg au - k.

__Proposition 32 :__ $f \in \mathcal{C}^k(M_1, M_2)$ si et seulement si f est la restriction d'une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans M_2

__Définition 33__ : On définit l'application tangente d'une fonction $f \in \mathcal{C}^k(M_1, M_2)$ en un point x par :

$$T_x f : T_x M_1 \longrightarrow T_{f(x)} M_2$$
$$\gamma'(0) \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\gamma(t)$$

__Remarque 34__ : Si f est la restriction d'une fonction C^k, $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans M_2, alors $\forall v \in T_x M$, $T_x f(v) = d_x\tilde{f}(v)$

__Remarque 35__ : Dans la définition 33, l'image ne dépend pas du γ choisi

__Proposition 36 :__ Si $f : M_1 \to M_2$ et $g : M_2 \to M_3$ sont C^k, $g\circ f$ est C^k et $\forall x \in M_1$, $T_x(g\circ f) = T_{f(x)} g \circ T_x f$.

__Proposition 37 :__ Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^1, et $f_{|M}$ a un extremum local en x_0, alors $T_{x_0} M \subset \ker df(x_0)$

__Corollaire 38__ Théorème des extremums liés : Si $M = F^{-1}(0)$ est une sous variété définie implicitement (i.e : dF est surjectif sur tout M), $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et $f_{|M}$ a un point critique en x_0, alors il existe $\omega \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que

$$df(x_0) = \sum_{1}^{n-p} \omega_i \, dF_i$$

__Définition 39__ : On dit que $f : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme si f est bijective et f et f^{-1} sont C^1

__Exemple 40 :__ $L_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $g \longmapsto u\circ g$ où $u \in GL(E)$

__Exemple 41 :__ Si $u \in O_n(\mathbb{R})$, $L_u : O_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R})$, $g \longmapsto g\circ u$ est un C^1-difféomorphisme
De plus, $T_I O_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $T_u O_n(\mathbb{R}) = u\mathcal{A}_n$

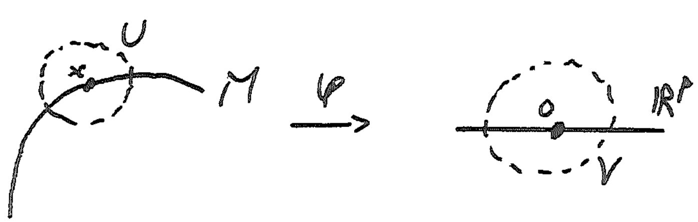
__Théorème 42 :__ (Inversion locale pour les sous variétés)
Si $f : M_1 \to M_2$ est C^1, et $T_x f$ est bijectif, alors f est un difféomorphisme local

__Application 43 :__ $SO_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n \geq 3$ impair]] DV2
(cf. Gonnord-Tosel)

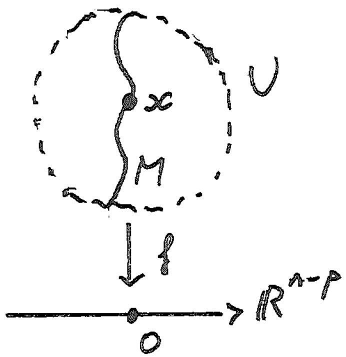
embêtante

ANNEXE

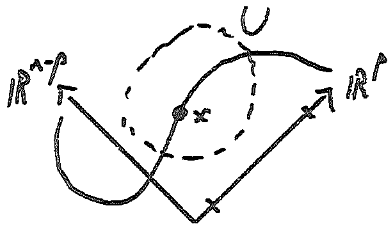
Redressement :



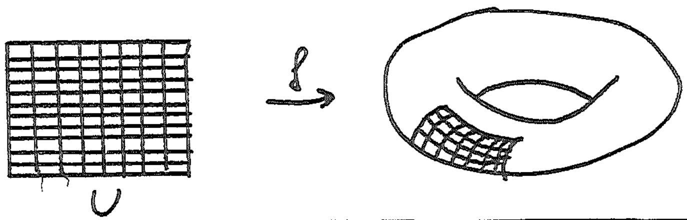
Implicites :



Graphe :



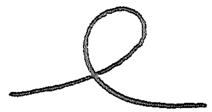
Paramétrage :



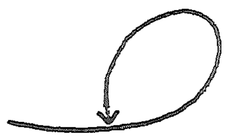
Contre-exemple 14 : $j :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$

- *Si j n'est pas une immersion :*

- *Si j n'est pas injective*



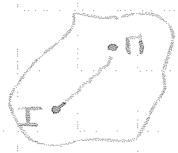
- *Si j n'est pas propre :*



Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.

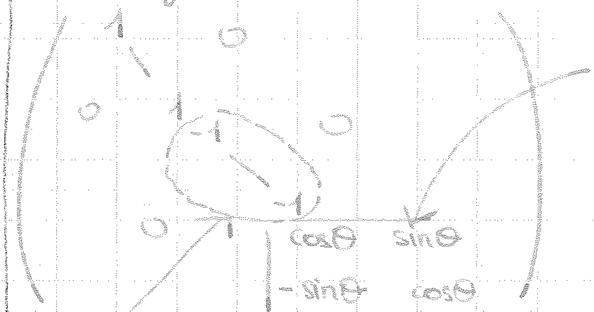
I. Questions dev 2 + plan.

- SO_n ss-variété de quelle régularité ? Ds de quelle rég de dev 2 ?
  ↳ $\mathcal{C}^\infty$ (fonc° implicite $\mathcal{C}^\infty$) ↳ $\mathcal{C}^1$
- Pquoi SO_n connexe ?
  ↳ ici en fait connexe par arc.



$M \in SO_n(\mathbb{R})$.
On veut un chemin $M \to I$.

M sous forme réduite :



$t \in [0,1]$. $\begin{pmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$

Comme $M \in SO_n$, det=1 → nbre pair de -1 → on les voit comme :
$\begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$ gpés 2 par 2.

dev2

- Est le cas pr des ss-variétés que connexe par arc ⟺ connexe ?
  ↳ oui car connexe + loc connexe par arc ⟹ connexe
  et ss-var = localemt $\mathbb{R}^n$

- Thm 8 (fonctions implicites). Expression de la diff de φ ?
  ↳ $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. $f(x,y) = 0 \iff \varphi(x) = y$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$
  $x \xmapsto{g} f(x, \varphi(x))$ $\quad (x, \varphi(x))$
  $dg(x)(h) = d_x f(\cancel{x})(h) + d_y f(\cancel{y}) \circ d\varphi(x)(h) = 0$ $\quad (x,\varphi(x))$
  $d\varphi(x)(h) = -d_y f(\cancel{y})^{-1} \circ d f(x)(h)$. $\quad (x,\varphi(x))$

$df(c) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ (lin)
$d_x f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (lin)
$d_y f(b) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ (lin)

$\cancel{d_x} f_y(x)$
↳ $f_y : x \mapsto f(x,y)$

Bien de la mettre ds le plan.

- Appli 24 (billard). Qu'est-ce qu'un billard cvxe à bord $\mathcal{C}^\infty$?
  ↳ K, ∂K $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^\infty$, L-périodique, injec° sr $[0,L[$
  $\|f'\| \neq 0$, immersion.

L'image de f est-elle une sous variété ?

- Prop 32. Pas forcémt vérifié. Et pas forcémt vrai globalemt (m si localemt oui).
- Thm des extrema liés. Appli ? → pour montrer l'in. arith-géom
  → + plt pavé d'une surface donnée
  → billard cvxe
  ⇒ mettre le billard après !! (ou les extrema cvt)

II Exercices

$\boxed{1}$ $C = \{(x-1)^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$S_r = \mathbb{S}^2(0,r)$

Est-ce que c'est des ss-variétés ? De quelle dim ?

Espace tangent ? Leur $\cap$?

$C = F^{-1}(0)$ où $F(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 - 1$

$dF(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = 2xh_1 - 2h_1 + 2yh_2$

$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$ (def par submersion, il faut que la diff soit surj. ie $\neq 0$ au V(C) = en ts les pts de C) car $\to \mathbb{R}$

Donc C est une ss-variété de dim 2. Subm de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ ⇒ var de dim p.

$T_{(x,y,z)} C = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}^{\perp}$

$S_r = \{x^2+y^2+z^2 = r^2\}$

$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2$

$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

Donc S_r est une sous-var de dim 2.

$T_{(x,y,z)} S_r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{\perp}$

$S_r \cap C = ?$

Distinguer selon la valeur de r. ...

(2) $F(x,y,z) = x + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$

Maximum de F s/ la sphère euclidienne (rayon 1) ?

∉ plan → Si w ($\in \mathbb{R}^3 = (x,y,z)$) est un extrema local de $F|_S$ alors $T_w S \subset \operatorname{Ker} dF(w)$

On cherche $w = (x,y,z)$ tq

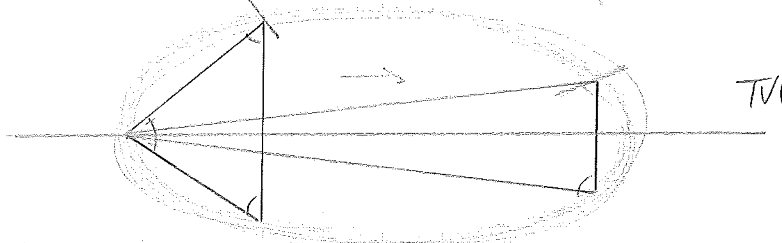
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{\perp} \subset \operatorname{Ker} dF(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}^{\perp} \quad \text{car} \quad \operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{\perp} \subset \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}^{\perp} \iff \cdots$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

III Commentaires

- défense du plan : bien insister s/ cmt on arrive à généraliser des résultats (recherche d'extrema, de pts critiques, thm du rg cst, fonc° implicites, ...) ↪ sert à la recherche de potentiel en ℓ.
- billard convexe :
  - * pas bs de s'embêter av n pts, 3 il y a déjà tte la complexité
  - * ⚠ ne pas se restreindre à une ellipse car c'est trivial (TVI).



TVI : à un point bissectrice et normale coïncident

- ⚠ à la def de variété ⊆ localement euclidien
  → indiqué préserva° du pdt scalaire et de de la métrique, fx préférer localement espace vectoriel

- Ce dt on peut parler :
  * Règle de la chaîne (composi° de fct ⇝ comp. de dériv.)
  * sous-variété produit
  * appl. des fonc° impl : $\sqrt{}$ simples des poly cx en fonc° des coeff.
  * ...