Système de Lotka-Volterra

[On trouvera ce développement dans le Berthelin, *Équations différentielles*, p.204, avec une présentation un peu différente.]

Soient $a, b, c, d > 0$, $(E) : \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$, $x_0, y_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution de (E) satisfaisant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$. On donnera une intégrale première de (E) ainsi que son portait de phase.

▸ Comme (E) est un système autonome réduit défini par une fonction de classe C^1, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale $(I, (x, y))$ satisfaisant les conditions initiales. Nous allons montrer que $I = \mathbb{R}$ et que (x, y) est périodique.

▸ Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $x(t_1) = 0$. Alors $t \mapsto (0, y(t_1)\exp(-c(t-t_1)))$ est une solution de (E) et coïncide avec (x, y) en t_1. Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz et par maximalité de (x, y), ces deux solutions sont égales sur I, *a fortiori* en t_0, ce qui est impossible car $x(t_0) = x_0 > 0$. Ainsi, $\forall\, t \in I,\ x(t) \neq 0$, puis $x(t) > 0$ par continuité. De même, $\forall\, t \in I,\ y(t) > 0$.

▸ Déterminons une intégrale première : on a $\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases}$ et $x, y > 0$ donc $\begin{cases} x'/x = a - by \\ y'/y = -c + dx \end{cases}$. En effectuant un produit en croix, on obtient $\dfrac{x'}{x}(-c + dx) = \dfrac{y'}{y} \times (a - by)$, donc $H : (x, y) \mapsto dx - c\ln(x) + by - a\ln(y)$ est une intégrale première de (E) (NB : $x, y > 0$)

▸ Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, posons $\mathcal{F}_{\alpha,\beta} : u >\mapsto \beta u - \alpha\ln(u)$, de sorte que $H(x, y) = \mathcal{F}_{a,d}(x) + \mathcal{F}_{c,b}(y)$. Pour tout $u > 0$, $\mathcal{F}'_{a,d}(u) = d - a/u = 0 \Leftrightarrow u = a/d$, et $\mathcal{F}''_{a,d}(u) = a/u^2 > 0$, donc $\mathcal{F}_{a,d}$ est convexe et admet un unique minimum atteint en a/d. De même, $\mathcal{F}_{c,b}$ est convexe et admet un unique minimum atteint en c/b.

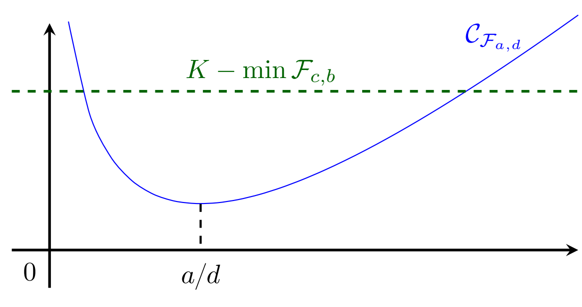

Figure 4.1 – Allure du graphe de $\mathcal{F}_{a,d}$

Par ailleurs, (x, y) est contenue dans une ligne de niveau de H, *i.e.* il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, t \in I,\ H(x(t), y(t)) = \mathcal{F}_{a,d}(x(t)) + \mathcal{F}_{c,b}(y(t)) = K$. De là, $\forall\, t \in I,\ \mathcal{F}_{a,d}(x(t)) \leqslant K - \min \mathcal{F}_{c,b}$. De là, x est bornée *(Note : la figure ci-dessous est suffisant lors d'une présentation à l'oral. Pour donner un argument précis, on peut dire que x n'était pas bornée, étant positive, on pourrait la faire diverger vers $+\infty$. Or $\mathcal{F}_{a,d}$ tend vers $+\infty$ et $+\infty$, contredisant la majoration de $\mathcal{F}_{a,d}(x(t))$ pour tout $t \in I$.)* On montre que même que y est bornée, donc (x, y) est bornée. D'après le théorème des bouts, $I = \mathbb{R}$.

▸ Les isoclines verticales sont :

$$I_0 = \{(x,y) \mid ax - bxy = 0\} = \{(x,y) \mid x(a-by) = 0\} = \{x=0\} \cup \left\{y = \frac{a}{b}\right\}$$
$$I_\infty = \{(x,y) \mid -cy + dxy = 0\} = \{(x,y) \mid y(-c+dx) = 0\} = \{y=0\} \cup \left\{x = \frac{c}{d}\right\}$$

et leurs points d'intersection $(0,0)$ et $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ sont les points stationnaires de (E). On découpe le quart de plan selon les quatre régions A, B, C et D représentées sur la figure ci-dessous (attention aux frontières). Dans ces régions, on connaît la direction globale du champ de vecteurs, *i.e.* les sens de variation de x et y, comme représenté avec les flèches sur la figue ci-dessous.

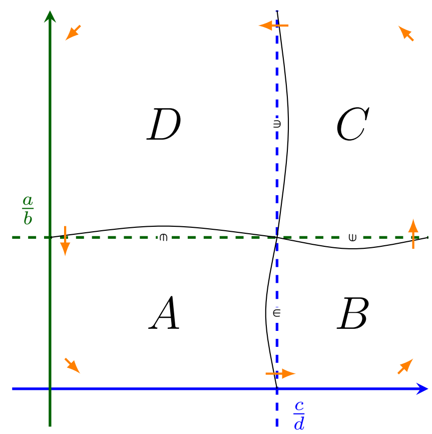

Figure 4.2 – Découpage du quart de plan en régions

▸ Supposons que $(x_0, y_0) \in A$ *(NB : les trois autres régions ne sont pas bornées comme l'est A, donc on pourrait se dire qu'on perd en généralité en faisant cette hypothèse, mais il faut également se souvenir qu'on a montré que la solution est bornée !)*. Montrons par l'absurde qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in B$: supposons le contraire. Dès lors, comme $\forall\, t > t_0,\ (x(t), y(t)) \in A$, on a $x'(t) > 0$ et $y'(t) < 0$, donc x et y sont monotones et bornées sur $]t_0, +\infty[$, donc d'après le théorème de la limite monotone, x et y convergent en $+\infty$, nécessairement vers un point stationnaire de (E). Par croissance de x, $\lim\limits_{+\infty} x \geqslant x_0 > 0$, donc $\lim\limits_{+\infty}(x,y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. par décroissance de y, $\frac{a}{b} = \lim\limits_{+\infty} y \leqslant y_0 \leqslant \frac{a}{b}$, donc y est constante égale à a/b à partir t_0. Comme $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \notin A$, et $\forall\, t \in I,\ (x(t), y(t)) \in A$, nécessairement $x(t) \neq c/d$, puis $x(t) < c/d$, donc $y'(t_0) = -cy(t_0) + dx(t_0)y(t_0) < 0$, ce qui contredit la constance de y à partir de t_0.

▸ Ainsi, il existe $t_1 > t_0$ tel que $(x(t_1), y(t_1)) \in B$. On montre de même qu'il existe $t_5 > t_4 > t_3 > t_2 > t_1$ tels que $(x(t_2), y(t_2)) \in C$, $(x(t_3), y(t_3)) \in D$, $(x(t_4), y(t_4)) \in A$ et $(x(t_5), y(t_5)) \in B$. Plus précisément, prenons pour t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5 les instant où (la trajectoire de) (x,y) traverse la frontière entre deux régions, *i.e.* les isoclines.

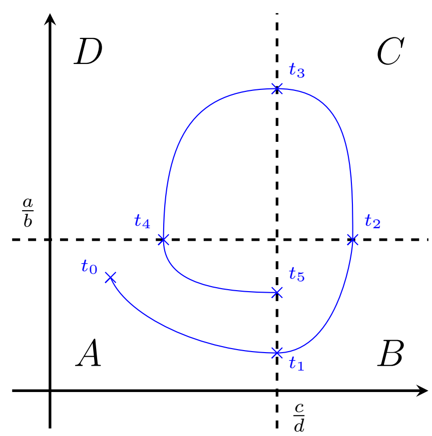

Figure 4.3 – Instants t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5

Pour conclure à la périodicité de (x,y), il suffit de montrer que $p_1 \overset{\text{def}}{=} (x(t_1), y(t_1)) = p_5 \overset{\text{def}}{=} (x(t_5), y(t_5))$, autrement dit $y(t_1) = y(t_5)$. Comme ces points précédents appartiennent à la trajectoire de (x,y), laquelle est contenue dans une ligne de niveau de H,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{a,d}(x(t_1)) + \mathcal{F}_{c,b}(y(t_1)) &= H(x(t_1), y(t_1)) \\ &= H(x(t_5), y(t_5)) = \mathcal{F}_{a,d}(x(t_5)) + \mathcal{F}_{c,b}(y(t_5))\end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}_{c,b}(y(t_1)) = \mathcal{F}_{c,b}(y(t_5))$. Comme $p_1, p_5 \in A$, $y(t_1), y(t_5) < a/b$, mais $\mathcal{F}_{c,b}$ est strictement décroissante sur (l'intervalle) $]0, a/b[$, donc elle y est injective, donc $y(t_1) = y(t_5)$. □

▸ Recasages : 220 (Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.), 267 (Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.)

▸ C'est un peu long à présenter : il est souhaitable, dans la fin de la preuve, de faire un grand dessin au tableau, et le compléter au fur et à mesure, ce qui permet d'écrire moins de texte au tableau et de gagner du temps.