Théorème de Fejér

- Queffélec, Zuily, *Analyse pour l'agrégation.* (84-85)

> On considère la somme partielle d'indice n de sa série de Fourier $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$ où $\forall k \in \mathbb{Z},\ e_k(t) = e^{ikt}$ est une fonction trigonométrique. On note $\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$.
>
> Le noyau de Fejér est $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=-k}^{k} e_j$ et vérifie :
>
> - $K_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, $K_n \geqslant 0$ et $\|K_n\|_1 = 1$
> - $\forall \delta \in]0,\pi],\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leqslant\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$
> - $\forall f \in L^1_{2\pi},\ \sigma_n(f) = f * K_n$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\|\sigma_n(f)\|_\infty = \|f * K_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|K_n\|_1 = \|f\|_\infty$.
Soit $\delta \in]0,\pi]$. On pose $\omega(\delta) = \{|f(u) - f(v)|,\ |u-v| \leqslant \delta\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= |K_n * f(x) - f(x)| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t - f(x)\|K_n\|_1 \right| \qquad \text{car } \|K_n\|_1 = 1 \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\big(f(x-t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\big|f(x-t) - f(x)\big|\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } K_n \geqslant 0 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} K_n(t)\big|f(x-t) - f(x)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leqslant\pi} K_n(t)\big|f(x-t) - f(x)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} K_n(t)\omega(\delta)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leqslant\pi} K_n(t) 2\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \omega(\delta) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t}_{=1} + 2\|f\|_\infty \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leqslant\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}
\end{aligned}$$

Donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant \omega(\delta)$.
Si on passe à la limite quand $\delta \to 0$, en utilisant la continuité uniforme de f, on a alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$. □

Si $f \in L^p_{2\pi}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$ et $\|\sigma_n(f) - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité de Hölder appliquée à la mesure de probabilité $K_n(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$ (i.e. positive de masse 1), on obtient pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(x)|^p &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times f(x-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t\right|^p \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^q K_n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{p}} \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_n(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x et par le théorème de Fubini-Tonelli (mesurable, positive) :

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f)\|_p^p &\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \|K_n\|_1\|f\|_p^p = \|f\|_p^p\end{aligned}$$

Comme dans la première démonstration, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\big(f(x-t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f) - f\|_p^p &\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) g(-t)\,\mathrm{d}t = \sigma_n(g)(0)\end{aligned}$$

avec $g : t \mapsto \|\tau_t f - f\|_p^p$. Or g est continue et 2π-périodique par le lemme donc par la première démonstration, $\sigma_n(g)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0) = 0$. D'où $\|\sigma_n(f) - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Lemme : Soit $f \in L^p_{2\pi}$ $(p \in [1, +\infty[)$.
Alors $\Phi_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & L^p_{2\pi} \\ a & \mapsto & \tau_a f \end{array}$ est uniformément continue (avec $\tau_a f(x) = f(x-a)$).

Démonstration. On procède par densité. Soit $\varepsilon > 0$.

- Supposons dans un premier temps que f est continue et 2π-périodique.

Par le théorème de Heine, f est uniformément continue donc il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi lorsque $|a - b| \leqslant \delta$, $\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} |f(x-a) - f(x-b)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon$.

- Supposons maintenant que $f \in L^p_{2\pi}$. Par densité des fonctions continues 2π-périodiques dans $L^p_{2\pi}$, il existe g continue et 2π-périodique telle que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$.

On a pour $|a - b| \leqslant \delta$,

$$\begin{aligned}\|\Phi_f(a) - \Phi_f(b)\|_p &\leqslant \|\Phi_f(a) - \Phi_g(a)\|_p + \|\Phi_g(a) - \Phi_g(b)\|_p + \|\Phi_g(b) - \Phi_f(b)\|_p \\ &\leqslant 2\|f - g\|_p + \|\Phi_g(a) - \Phi_g(b)\|_p \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon\end{aligned}$$ $\square$

Remarque. Le théorème de Fejér nous donne que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément au sens de Césaro vers f.
On ne peut pas appliquer ce résultat au noyau de Dirichlet car la positivité de K_n fait fonctionner la preuve.