NOM : MICHAUD Prénom : Robin Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Autre sujet :

Dans la suite, $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}^m$, $U\subset E$ et $V\subset F$ sont des ouverts, $f : U\to F$ une application.

I - Applications différentiables

1. Différentielle

Définition 1 : $f : U \to F$ est dite différentiable en $a\in U$ si il existe $\varphi\in\mathcal{L}_c(E,F)$ telle que

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$$

On dit que φ est la différentielle de f en a et on la note df_a ou d_af.

On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Remarque 2 : La différentielle dépend a priori de la norme. Comme on est en dimension finie, elle n'en dépend pas.

Proposition 3 : Si elle existe, la différentielle est unique.

Exemple 4 : - Si $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$, f est différentiable sur E, et pour tout $x\in E$, $d_xf=f$

- $u\in\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\longmapsto u^{-1}$ est différentiable sur l'ouvert des applications inversibles.

Remarque 5 : Si $E=F=\mathbb{R}$, la différentiabilité correspond à la dérivabilité, et $d_xf=(h\longmapsto f'(x)h)$

Proposition 6 : Si $f : U\to F$ est différentiable en $a\in U$, alors f est continue en a.

Proposition 7 : Opérations sur les différentielles.

$*$ Soient $f,g : U\to F$ différentiables, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, alors $\lambda f+\mu g$ est différentiable et

$$d_x(\lambda f+\mu g) = \lambda d_xf + \mu d_xg$$

$*$ Soit $f : U\to F$, $g : V\to\mathbb{R}^k$ telle que V contient $f(U)$, différentiables, alors $g\circ f$ est différentiable et

$$d_x(g\circ f) = d_{f(x)}g\circ d_xf$$

Corollaire 8 : Si $F=\mathbb{R}$, $f,g : U\to F$, différentiable alors $d_x(fg) = f d_xg + g d_xf$

Exemple 9 : - $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x\longmapsto \|x\|^2$ est différentiable et $df_x(h) = 2\langle x,h\rangle$ $\forall x,h\in\mathbb{R}^n$.

Définition 10 : Si $F=\mathbb{R}$, f différentiable sur U, alors pour $x\in U$, $d_xf\in E^*$, donc il existe un unique vecteur v_x tel que $\forall h\in E$

$$d_xf(h) = \langle v_x,h\rangle$$

On appelle v_x le gradient de f en x et on le note grad_xf.

Exemple 11 : Si $f(x)=\|x\|^2$, $\mathrm{grad}_xf = 2x$

Théorème 12 : (Accroissements finis) Si $[a,b]\subset U$, $\|d_xf\|$ borné par M sur $]a,b[$, alors $\|f(b)-f(a)\|\le M\|b-a\|$

2. Dérivées partielles

Définition 13 : On dit que f admet une dérivée partielle en a selon e_i si $\dfrac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$ a une limite quand t tend vers 0, où $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ cette limite.

Proposition 14 : Si f est différentiable en a, elle admet des dérivées partielles dans toute les directions, et de plus

$$d_a f(v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

La réciproque est fausse :

Contre-exemple 15 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dérivable selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Théorème 16 : Soit $a \in U$. Si toute les dérivées partielles de f existent dans un voisinage de a et sont continues en a, alors f est différentiable en a, et de plus :

par rapport à l'1 des var !!

$$d_a f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i$$

Application 17 : $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$ est différentiable

Définition 18 : Si $f : E \to F$ s'écrit $f = (f_1,\dots,f_m)$ avec $f_m : E \to \mathbb{R}$, la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de E et F est $J_a = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ appelée matrice jacobienne de f.

Application 19 : Si $f : E \to \mathbb{R}$ est différentiable et admet un extrêmum local en a Alors $d_a f = 0$, autrement dit $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ $\forall i,j$.

Proposition 20 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ et $\varphi : V \subset F \to E$ telles que $\varphi(V) \subset U$, écrivons $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. Alors, si f est différentiable en $\varphi(a)$, et φ différentiable en a, alors $F = f\circ\varphi$ est différentiable en a, et de plus :

$$\frac{\partial F}{\partial v_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(a)) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_j}(a)$$

Application 21 : Changement de coordonnées : ex : passage en polaire par $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable

$$\operatorname{grad}_a f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial r} e_r$$

II - Difféomorphismes

Définition 22 : On dit que f est de classe C^1 si f est différentiable sur U et que $a \mapsto d_a f$ est continue

Définition 23 : Si f est bijective sur son image, de classe C^1 et que f^{-1} est de classe C^1, on dit que $f : U \to f(U)$ est un difféomorphisme. On a alors $\forall a \in U$, $d_{f(a)} f^{-1} = d_a f^{-1}$

Exemple 24 : - Si $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ est inversible, c'est un difféo d'inverse f^{-1}.

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est bijective et de classe C^1, mais ce n'est pas un difféomorphisme

Exercice 25 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^1, et $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ $\|f(x)-f(y)\| \geq \|x-y\|$

Alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 26 : (d'inversion locale) Soit $f : U \to F$ de classe C^1. Si il existe $a \in U$ tel que $d_a f$ est inversible, alors il existe V voisinage ouvert de a, W voisinage ouvert de $f(a)$, tels que $f_{|V}$ est un difféomorphisme de V sur W.

Corollaire 27 (Théorème d'inversion globale) Si $f : U \to F$ est injective de classe C^1, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall x \in U$, $d_x f$ est inversible

ii) $V = f(U)$ est un ouvert de F et $f^{-1} : V \to U$ est de classe C^1

Exemple 28 : $\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$ est C^1 et injective, et sa différentielle est $D\mathrm{Inv}_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$. C'est donc un difféomorphisme.

Théorème 29 : (Des fonctions implicites) Soit G un espace vectoriel réel de dimension finie, $\begin{array}{rcl} f : U \times V \subset E \times F & \to & G \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ de classe C^1. On note $\partial_2 f(x,y)$ la différentielle de la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ au point y. Si $\partial_2 f(a,b)$ est inversible, alors il existe des voisinages ouvert
- U' de a, $(U' \subset U)$
- W de $f(a,b)$
- Ω de (a,b) $(\Omega \subset U \times V)$

Il existe $\varphi : U' \times W \to V$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in U'$, $z \in W$, il existe une unique solution y de $f(x,y) = z$, et $y = \varphi(x,z)$

DV1 **Application 30 :** Théorème des extremums liés : Soient $f, g_1, \dots g_r$ des applications C^1 de U dans $\mathbb{R}$. Soit $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en a, et si $dg_{1a}, \dots dg_{ra}$ sont linéairement indépendantes, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ réels tq $df_a = \lambda_1 dg_{1a} + \dots + \lambda_r dg_{ra}$

III - Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition 31 : Si elles existent, on définit par récurrence
$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)$$

f est de classe C^p si toute ses dérivées partielles existent et sont continues jusqu'à l'ordre p.

Théorème 32 (Schwarz) Si f est de classe C^p, les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p ne dépendent pas de l'ordre de dérivation

Théorème 33 : (Formules de Taylor) On note pour $k \leq p$
$$\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[k]} = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} h_1^{i_1} \dots h_n^{i_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(a)$$

Alors, si f est de classe C^p,

- $f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[j]} + o(\|h\|^p)$ (Taylor-Young)

- Si $[x, x+h] \subset U$, $\exists \theta \in]0,1[$ tel que
$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!}\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[j]} + \frac{1}{p!}\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right]^{[p]}$$
(Taylor-Lagrange)

- $f(x+h) = f(x) + \sum \frac{1}{j!}\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[j]} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}\left[\sum h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)\right]^{[p]} dt$
(Taylor reste intégral)

Théorème 34 (Lemme de Morse) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3, nulle en 0, telle que $df_0 = 0$. Si $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$ est inversible, alors il existe $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un difféomorphisme sur un voisinage de 0 tel que sur ce voisinage DV2
$$f(x) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_r(x)^2 - \varphi_{r+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$$

3

* <u>Théorème d'inversion locale.</u> f $\mathcal{C}^1$ sur U. $Df(a)$ bij $E \to F$. Alors :

$\exists V$ ouvert $\ni a$, $\exists W$ ouvert $\ni f(a)$ tq $f|_V$ est $\mathcal{C}^1$ difféo. $V \twoheadrightarrow W$

$V \twoheadrightarrow W$ homéo $\mathcal{C}^k$, différentielle inversible

$\Updownarrow$

<u>Théorème des fonctions implicites</u>

* <u>Théorème du rg constant</u> : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^{k \geq 1}$, $a \in U$, rg f est $= r$ au $\mathcal{V}(a)$
  - ↳ très bon dvt
  - ↳ permet de faire le lien av les s-variétés

$$
\begin{tikzcd}
a & \in V \subset U \arrow[r, "f"] & f(a) \arrow[d, mapsto] & \in W \arrow[d, "\psi"] \\
0 \arrow[u, mapsto] & V' \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathcal{C}^k \text{ difféo } \varphi"'] & 0 & W' \text{ ouvert de } \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

<u>Ref</u> : Avez

Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

I) Questions

- Appli diff non difféomorph pas intéressante ?

Dans le dvt 1, si difféo ($r = n$) : évident, bcp de tps passé inon

- Corollaire ? Dém ?

↳ on utilise $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \mapsto x_1 x_2$ différentiable

$f(a+h, b+k) = (a+h)(b+k) = ab + ak + bh + hk$

↳ $o(\|(h,k)\|)$

Et si on a un produit de 3 ?

↳ Par récurrence, on peut montrer qu'il n'y a pas de pbs

→ les poly sont différentiables et $\mathcal{C}^\infty$

- TAF. Cmt ça se montre ? (thm 12)

↳ Utilise le TAF $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t} f(a+th) = D_{a+th}(h)$ $\quad [a, th, t \in [0,1]]$

Utile ?

- (ex 15) Un c-ex avec une fonc° qui est $\mathcal{C}^\infty$?

- Difféomorph. On a la déf $\mathcal{C}^1$ de la déf où est différentiable etc.

- Si f différ. de différ. inversible. Inversible. Que peut-on dire de f ?

↳ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective $f'(a) \neq 0$ f^{-1} dér en $f(a)$

$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

f homéomorph $U \to V$ f diff en a $Df(a)$ inversible

Alors f^{-1} est diff en $f(a)$ et $D f^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$

II Exercices

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \overset{\varphi}{\longmapsto} e^{tr(A)}A$ Différentiable ?

Si oui calculer la différentielle

$A = (a_{ij})_{ij}$ dans E_{ij}

- $\varphi(A + tE_{ij}) = e^{tr(A)}(A + tE_{ij})$ si $i \neq j$

$$= \varphi(A) + e^{tr(A)}tE_{ij}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial E_{ij}}(A) = e^{tr(A)}E_{ij}$$

- Si $i = j$, $\varphi(A + tE_{ij}) = e^{tr(A)+t}(A + tE_{ij}) = e^{t}e^{tr(A)}(A + tE_{ij})$

$$\frac{\varphi(A + tE_{ij}) - \varphi(A)}{t} = e^{tr(A)}A\frac{(e^t - 1)}{t} + e^t e^{tr(A)}E_{ij}\frac{\cancel{t}}{\cancel{t}}$$

$$= e^{tr(A)}A + e^{tr(A)}E_{ij}$$

- $H = (h_{ij})$

$$d_A\varphi(H) = \sum_{i \neq j} h_{ij}e^{tr(A)}E_{ij} + \sum_i h_{ii}\left(e^{tr(A)}A + \ldots\right.$$

Il faut regarder les dériv. partielles pour "intuiter" une différentielle

2. $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivable $g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$

Supposons que f est 2 fois dérivable en a. Mq g est différentiable

$$g(a+h, a+k) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a+k)}{h - k} & \text{si } h \neq k \\ f'(a+h) & \text{si } h = k \end{cases}$$

$f(a+h) - f(a+k) = d_af(h) - d_af(k) + o(h) + o(k)$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$ où $D = \{x, x\}$, g est diff.

Indication : Introduire $\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t-a)f'(a) - \frac{(t-a)^2}{2}f''(a)$

III Commentaires

- Complètement à côté de la leçon.
  Différentiabilité → pour faire les dérivées partielles
- Dvt 1 : pas bien
  Oublie les sous-variétés et la notion d'espace tangent
  \+ que des dérivées partielles
- Manque d'exemples et d'appli
  * Appli li : C^0 : C^∞
  * Appli bili, tri-li.
  * Polynômes
- Problème d'inversion locale ne se comprend pas avec les dérivées partielles !
- Thm fondamental : TAF. Des applications !! Un chapitre !
  Savoir le démontrer
- Un thm fondamental vrai qu'en dim finie : thm du rg constant
  Fait lien avec la notion de sous-variété
- φ de la leçon : différentielle = essayer de travailler avec des applis sans forcément regarder coord par coord

Donner un certain nombre de déf et parler des dérivées partielles le + tard possible

linéaire C^0

* déf : $\dfrac{\|f(a+h) - f(a) - L.h\|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ $\qquad Df(a) = L$ $\qquad f : O \to F$

  $E = \mathbb{R}$: $\Leftrightarrow$ f dérivable en a, $f'(a) \in F$, $d_a f(h) = h f'(a)$ ($\in \mathbb{R}$) $\qquad Df : U \to \mathcal{L}(E,F)$, $a \mapsto Df(a)$ "$d_a f$"

Ref : Cartan ←

* thm de Schwarz : différentiable en un V + diff 2 fois $\Rightarrow$ la diff 2nde est symétrique (← utiliser bien TAF)
* L linéaire $\Rightarrow$ diff : $L(a+h) - L(a) - L(h) = 0$ $\qquad DL(a) = L$
  (L appli cste)

B bilinéaire : $DB(x,y)(h,k) = B(x,k) + B(h,y)$

DB Intérieur → $\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$

Multilinéaire DL par bilinéaire ou combinaison de

Généralisé à Π multilinéaire, différentiable

Cas : polynomial ⇒ $\mathcal{C}^\infty$ (ex : $\det$ → $\mathcal{C}^\infty$)

($d\!f = \mathrm{tr}(\ldots)$) Son orbite

* Espace d'arrivée F = pdt (eg $\mathbb{R}^n$). $f_1, \ldots, f_m$

Adapté diff que chacune des comp

Espace de départ E = pdt (eg $\mathbb{R}^m$) Dérivées partielles

Pas aussi simple

* $D(g \circ f)(a) \cdot h = Dg(f(a)) \cdot (Df(a) \cdot h)$

$f : U \subset E \to F$ $\quad$ $\uparrow \mathcal{L}(E,F)$ $\quad \uparrow E$

$g : V \subset F \to G$ $\quad$ $\mathcal{L}(F,G)$ $\quad F$

$\uparrow G$

* IAF. $f : [a,b] \to F$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que f et g dérivables à dte, $\|f'_d\|_F \leq g'_d$. Alors :

$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

• $f : U \subset E \to F$ diff $[a,b] \subset E$. Alors :

$\|f(b) - f(a)\| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} \|Df(x)\|$

• dém (Hors) : $\varepsilon > 0$ fixé $E_\varepsilon := \{t \in [a,b], \|f(x) - f(a)\| \leq (b-a)$ $(g(x) - g(a)) + \varepsilon\}$

E_ε est fermé et contient un $[a, a+\alpha]$ ($\alpha > 0$)

$x \in E_\varepsilon$ $\left\| \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\| \leq (b+\varepsilon) \lim \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$

$\|f(x+h) - f(x)\| \leq g(x+h) - g(x)$ pour h pt

≠ cas le cas $\mathbb{R}$

$\|f(x+h) - f(a)\| \leq \|f(x+h) - f(x)\| + \|f(x) - f(a)\| \leq (b+\varepsilon)(g(x+h) - g(a))$

$x + h \in E_\varepsilon$. Si $E_\varepsilon \neq [a,b]$, E_ε contient un $[a, s]$ et aucun plus gd. $s \in E_\varepsilon$ ⇒ $s+h$ aussi. Absurde (prop borne sup $\mathbb{R}$).

• Applica° : Si f_n diff et U cvxe, Df_n cvge unif vers g, f_n cvge en a alors $f_n \to f$, f diff et $Df(x) = g(x) = \lim Df_n(x)$

• Appli 2 : Si dérivées partielles ∃ + $\mathcal{C}^0$ (≠ à les ∃ mais !!) alors la fonc° est diff et même $\mathcal{C}^1$

• Appli 3 : Schwarz

• Appli 4 : Hauer version $\mathcal{C}^1$

↳ Suite recto plan