Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

- Isenmann, Pecatte, *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* (166-169)

Lemme 1 : Les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ sont les applications de la forme $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* \\ A & \mapsto & f_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM) \end{array}$ une fonction injective.
En effet, $\mathrm{Ker} f = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.
Donc, si $A \in \mathrm{Ker} f$ alors $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$. D'où $A = 0$.
Comme $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ alors f est en fait un isomorphisme. □

Lemme 2 : Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathrm{Conv}(A)$ est compact.

Démonstration. Posons $C = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\}$ un compact (fermé, borné). Posons $f : \begin{array}{ccc} A^{n+1} \times C & \to & \mathbb{R}^n \\ \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \end{array}$

Par le théorème de Carathéodory, on en déduit que l'image de f est $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
Or f est continue donc $\mathrm{Conv}(A)$ est compact (image continue d'un compact $A^{n+1} \times C$). □

Théorème : On a $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = B(0,1) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\|_2 \leqslant 1\}$.

Démonstration.
($\subset$) Pour $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, M conserve la norme euclidienne, donc $\|M\|_2 = 1$.
Ainsi, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset B(0,1)$ et comme $B(0,1)$ est convexe alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subset B(0,1)$.
($\supset$) Supposons par l'absurde qu'il existe $M \in B(0,1)$ telle que $M \notin \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact (image réciproque continue d'un fermé $M \mapsto {}^tMM - I_n$, borné car $\|M\|_2 = 1$, comme on est en dim finie, c'est un compact).
Alors, grâce au lemme 2, $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est compact.
De plus, comme $\{M\}$ est un convexe fermé tel que $\{M\} \cap \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \varnothing$ alors d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ telle que

$$\sup_{N \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi(N) \leqslant \sup_{N \in \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \varphi(N) < \varphi(M)$$

car $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est le plus petit convexe tel que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.
Le lemme 1 assure qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = \mathrm{tr}(AX)$.
Par la décomposition polaire, il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.
Or d'après le théorème spectral, S est diagonalisable et il existe une base orthonormée de vecteurs propres $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de S.

$$\begin{aligned} |\mathrm{tr}(AM)| = |\mathrm{tr}(MA)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i\rangle\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|MAe_i\|_2 \|e_i\|_2 \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \|OSe_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2 \quad \text{car } M \in B(0,1) \text{ et } O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle Se_i, e_i\rangle = \mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}(AO^{-1}) = \varphi(O^{-1}) \end{aligned}$$

D'où $\varphi(M) \leqslant \sup_{O \in \mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))} \varphi(O)$. Ce qui est absurde. □

Théorème de Hahn-Banach : Soit E un $\mathbb{R}$-evn. Soient F un convexe fermé de E et C un convexe compact de E tels que $F \cap C = \varnothing$. Alors, il existe $\varphi \in E'$ tel que

$$\sup_{x \in C} \varphi(x) < \inf_{y \in F} \varphi(y)$$

Théorème de Carathéodory : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Tout point de $\mathrm{Conv}(A)$ est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de A.

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{Conv}(A)$. On peut écrire a comme le barycentre à coefficients positifs de points de A : $a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$ avec $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $a_i \in A$.
Supposons que $p > n+1$ et montrons que a peut s'écrire comme barycentre de $p-1$ points de A. En itérant, on obtient le résultat voulu. Comme $p-1 > n$ et qu'on est dans $\mathbb{R}^n$ alors la famille $(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_p - a_1)$ est liée. Donc il existe $\mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^{p} \mu_i (a_i - a_1) = 0$. Posons $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{p} \mu_i$. Ainsi, $\sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i = 0$. Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\mu_i) a_i$$

On va chercher un t qui annule l'un des coefficients (au moins) mais en gardant tous les autres positifs (la somme vaut toujours 1 car la somme des μ_i est nulle). Comme les μ_i sont non tous nuls et de somme nulle, il existe $i_0 \in [\![1, p]\!]$ tel que $\mu_{i_0} < 0$.
Notons $\tau = \min\{-\lambda_{i_0}/\mu_{i_0},\ \mu_{i_0} < 0\} > 0$ et $\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = \lambda_i + \tau \mu_i$. Par construction, les $x_i \geqslant 0$ de somme égale à 1 et il existe au moins un indice j où $x_j = 0$ (tout indice qui correspond au max). Ainsi a s'écrit comme combinaison convexe de $p-1$ points de A. $\square$