106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

[G] 95 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Groupe linéaire

déf 1 : On appelle groupe linéaire le groupe des automorphismes de E (i.e. des applications linéaires bijectives de E dans E).

♡ **th 2 :** Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $GL(E) \to GL_n(\mathbb{K})$, $u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme non canonique entre GL(E) et $GL_n(\mathbb{K})$ (le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$).

[R] 126 **th 3 :** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- $u \in GL(E)$.
- $Ker(u) = \{0\}$ (i.e. u est injectif).
- $Im(u) = E$ (i.e. u est surjectif).
- u transforme toute base de E en une base de E.
- il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id_E$.
- il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = Id_E$.
- $rg(u) = n$.
- $det(u) \neq 0$.

[P] **déf 4 prop :** L'application déterminant est un morphisme multiplicatif de GL(E) dans $\mathbb{K}^*$. Son noyau s'appelle groupe spécial linéaire et se note SL(E). Il est isomorphe à $SL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices de déterminant 1.

[R] **prop 5 :** SL(E) est distingué dans GL(E).
Le groupe quotient GL(E)/SL(E) est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.

II. Générateurs et centres de GL(E) et SL(E).

1. Éléments de GL(E)

♡ **déf 6 :** Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle homothétie de rapport λ l'application de GL(E) définie par $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$.

[P] **prop 7 :** Soit $u \in GL(E)$. Si u laisse invariant toutes les droites vectorielles alors u est une homothétie.

déf 8 prop : Soit H un hyperplan de E. Soit $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- $\det u = \lambda \in \mathbb{K}^* \setminus \{1\}$ (i.e. $u \in GL(E) \setminus SL(E)$).
- u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ (donc une droite propre D pour λ) et u est diagonalisable
- $Im(u - Id) \not\subset H$.
- dans une base convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\lambda \neq 1$.

On dit que u est une dilatation d'hyperplan $H = Ker(u - Id)$ et de droite $D = Im(u - Id)$.

déf 9 prop : Soit $f \in E^*$. On pose $H = Ker f$. Soit $u \in GL(E) \setminus \{Id\}$ tel que $u_{|H} = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
- $\det u = 1$ (i.e. $u \in SL(E)$).
- u n'est pas diagonalisable.
- on a $D = Im(u - Id) \subset H$.
- le morphisme induit $\bar{u} : E/H \to E/H$ est l'identité de E/H.
- il existe $a \in H \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in E, u(x) = x + f(x)a$
- dans une base convenable, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

On dit alors que u est une transvection de droite D et d'hyperplan H.

prop 10 : Soit τ une transvection de droite D et d'hyperplan H. Soit $u \in GL(E)$. Alors $u \tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

2. Centres de GL(E) et de SL(E).

déf 11 : Pour un groupe G, le centre de G est le sous-groupe $Z(G) = \{h \in G, \forall g \in G, gh = hg\}$. [P] 12

38 [R] prop12 : • $Z(GL(E))$ est formé des homothéties h_λ avec $\lambda\in\mathbb{K}^*$. Donc $Z(GL(E))\simeq\mathbb{K}^*.Id$.
• $Z(SL(E))=Z(GL(E))\cap SL(E)\simeq\mu_n(\mathbb{K}).Id$ où $\mu_n(\mathbb{K})=\{\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda^n=1\}$.

[P] ex13 : Si $n=1$ alors $GL(E)=\mathbb{K}^*$ est commutatif et $SL(E)=\{1\}$.

3. Générateurs.

[P] th14 : • Les transvections engendrent $SL(E)$.
• Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

[R] 170 appli15 : Pour tout morphisme de groupes continu $f: GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^*$, il existe $r\in\mathbb{N}$ tel que $\forall A\in GL_n(\mathbb{K})$, $f(A)=(\det A)^r$.

[P] prop16 : Deux dilatations sont conjuguées dans $GL(E)$ ssi elles ont même rapport.

prop17 : Deux transvections sont conjuguées dans $GL(E)$. Si $n\geq 3$, elles le sont aussi dans $SL(E)$.

ex18 : Dans $SL_2(\mathbb{K})$, toute transvection est conjuguée d'une matrice $\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}^*$.
Deux matrices $\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&\mu\\0&1\end{pmatrix}$ (avec $\lambda,\mu\in\mathbb{K}^*$) sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{K})$ ssi $\frac{\lambda}{\mu}$ est un carré dans $\mathbb{K}$.

[BMP] 186 +♡ ex19 : (Pivot de Gauss)
Pour $M\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, multiplier à gauche par une matrice de transvection $I_m+aE_{ij}\in GL_m(\mathbb{K})$ revient à effectuer $L_i\leftarrow L_i+aL_j$ et multiplier à droite par une matrice de transvection $I_n+aE_{ij}\in GL_n(\mathbb{K})$ revient à effectuer $C_j\leftarrow C_j+aC_i$.
Par cette méthode, on peut transformer M en matrice échelonnée par lignes et colonnes.

III. Sous-groupe de $GL(E)$: Groupe orthogonal.

On suppose ici que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et on munit E d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (i.e. E est un espace euclidien) [R] 704

déf20 : On dit que $u\in\mathcal{L}(E)$ est orthogonal si $\forall(x,y)\in E^2$, $\langle u(x)|u(y)\rangle=\langle x|y\rangle$. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

rem21 : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.
On note $O_n(\mathbb{R})=\{A\in GL_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA=I_n\}$.
On a $O(E)\simeq O_n(\mathbb{R})$.

prop22 : Soit $u\in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par u.

prop23 : Si $u\in O(E)$, on a $\det u=\pm1$. On définit alors $SO(E)=\{u\in O(E),\ \det u=1\}$ le sous-groupe spécial orthogonal de E. C'est un sous-groupe distingué de $O(E)$ d'indice 2.

déf24 : On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et renversement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de codimension $n-2$. [P]

prop25 : $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales et $SO(E)$ est engendré par les renversements si $n\geq3$. [P] 143

appli26 : Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors on a l'isomorphisme : 164
DVP1 $SO_3(\mathbb{R})\simeq G/\{\pm1\}$.

IV. Actions de $GL_n(\mathbb{K})$

1. Par translation

th27 : L'application $GL_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $(P,M)\longmapsto PM$ [H2G2] 131
définit une action par translation à gauche

Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même noyau.

rem28 : La matrice échelonnée PM trouvée par le pivot de Gauss est dans l'orbite de M.

133 th29 : L'application $GL_m(\mathbb{K}) \times M_{n,m}(\mathbb{K}) \to M_{n,m}(\mathbb{K})$
$(P,M) \mapsto MP^{-1}$
définit l'action par translation à droite.
Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même image.

2. Par équivalence.

déf30 : L'application $(GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})) \times M_{m,n}(\mathbb{K}) \to M_{m,n}(\mathbb{K})$
$((P,Q),M) \mapsto PMQ^{-1}$
s'appelle action par équivalence.

4 th31 : (du rang) Deux matrices de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite sous cette action ssi elles ont même rang. Les orbites sont entièrement caractérisées par le rang.

3. Par conjugaison.

83 déf32 : L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$
$(P,M) \mapsto PMP^{-1}$
définit une action par conjugaison.
On dit que deux matrices sont semblables si elles sont dans la même orbite.

85 prop33 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisables. A et B sont semblables ssi elles ont le même polynôme caractéristique.

4. Par congruence.

Ici car $\mathbb{K} \neq 2$.

150 déf34 : L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) \to S_n(\mathbb{K})$ définit
$(P,M) \mapsto PM{}^tP$
une action par congruence.

On dit que deux matrices sont congruentes si elles sont dans la même orbite.
($S_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ symétriques).

prop35 : • Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors deux matrices de $S_n(\mathbb{C})$ sont dans la même orbite ssi elles ont même rang 151
• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p+q = rg(A)$ et A est congruente à $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.
Le couple (p,q) s'appelle la signature de A.
Deux matrices de $S_n(\mathbb{R})$ sont dans la même orbite ssi elles ont même signature.

th36 : (loi d'inertie de Sylvester). [R]
Si Q est une forme quadratique sur E de signature (p,q) alors il existe $\ell_1, \dots, \ell_{p+q}$ des formes quadratiques indépendantes telles que 400
$Q = \sum_{i=1}^{p} \ell_i^2 - \sum_{i=1}^{p+q} \ell_i^2$.

V. Éléments de topologie

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme: [R]
$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ avec $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{K}^n$. 152
$(\mathcal{L}(E), |||\cdot|||)$ est une algèbre de Banach.

th37 : $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et $u \mapsto u^{-1}$ est une application continue sur $GL(E)$.

prop38 : Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $G \subset B(I_n, \sqrt{2})$. Alors $G = \{I_n\}$.

prop39 : Si $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace euclidien. Alors, $O(E)$ est un sous-groupe compact de $GL(E)$.

th40 : (décomposition polaire)
DvP2 $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}), A = OS$. [IP]
Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, cette décomposition est unique et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.