Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ continues. Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, le problème de Cauchy

$$(E) : \quad \begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Démonstration. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée $|||\cdot|||$.

- Commençons par le cas où $I = [a,b]$ un segment contenant 0. On cherche une solution de (E) définie sur $[a,b]$. Posons $f : \begin{array}{ccc} [a,b] \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t,x) & \mapsto & A(t)x + b(t) \end{array}$

Par composition de deux fonctions continues, $t \mapsto |||A(t)|||$ est continue sur $[a,b]$. Elle est donc bornée i.e. il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [a,b],\ |||A(t)||| \leqslant M$.
Par propriété des normes d'opérateurs linéaires, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,\ \forall t \in [a,b]$,

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| = \|A(t)x_1 - A(t)x_2\| \leqslant |||A(t)|||\|x_1 - x_2\| \leqslant M\|x_1 - x_2\| \qquad (\star)$$

Ainsi, f est M-lipschitzienne selon sa seconde variable.
Posons l'application linéaire $L : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall y \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n),\ L(y) : t \mapsto y_0 + \int_0^t f(s,y(s))\,\mathrm{d}s$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'opérateur $L(y) \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. De plus, $\forall t \in [a,b],\ L(y)'(t) = f(t,y(t)) = A(t)y(t) + b(t)$ et $L(y)(0) = y_0$. On en déduit donc que y est une solution de (E) sur $[a,b]$ ssi $L(y) = y$.

- On souhaite donc appliquer le théorème du point fixe. Montrons par récurrence que l'une des itérées de L est contractante.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_p : \forall y_1, y_2 \in (\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty),\ \forall t \in [a,b]$,

$$\|L^p(y_1)(t) - L^p(y_2)(t)\| \leqslant \frac{M^p|t|^p}{p!}\|y_1 - y_2\|_\infty$$

$\forall t \in [a,b],\ \|L(y_1)(t) - L(y_2)(t)\| \leqslant \left|\int_0^t \big\|f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))\big\|\,\mathrm{d}s\right| \leqslant M|t|\|y_1 - y_2\|_\infty$ d'après $(\star)$ donc H_1 est vraie.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que H_p soit vraie. Alors, $\forall t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\|L^{p+1}(y_1)(t) - L^{p+1}(y_2)(t)\| &= \left\|\int_0^t \Big(f\big(s, L^p(y_1)(s)\big) - f\big(s, L^p(y_2)(s)\big)\Big)\,\mathrm{d}s\right\| \\
&\leqslant \left|\int_0^t \Big\|f\big(s, L^p(y_1)(s)\big) - f\big(s, L^p(y_2)(s)\big)\Big\|\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^t M\big\|L^p(y_1)(s) - L^p(y_2)(s)\big\|\,\mathrm{d}s\right| && \text{par } (\star) \\
&\leqslant M\left|\int_0^t \frac{M^p|s|^p}{p!}\|y_1 - y_2\|_\infty\,\mathrm{d}s\right| && \text{par } H_p \\
&= \frac{M^{p+1}}{p!}\|y_1 - y_2\|_\infty \times \frac{|t|^{p+1}}{p+1} && \text{d'où } H_{p+1}
\end{aligned}$$

D'où, $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n),\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \|L^p(y_1) - L^p(y_2)\|_\infty \leqslant \dfrac{M^p(b-a)^p}{p!}\|y_1 - y_2\|_\infty$.
Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{M^p(b-a)^p}{p!} = 0$ (terme général de la série exponentielle) alors il existe un rang $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \dfrac{M^{p_0}(b-a)^{p_0}}{p_0!} < 1$.
Donc L^{p_0} est contractante sur l'espace de Banach $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. D'après le théorème du point fixe, il existe un unique élément $y \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ tel que $L^{p_0}(y) = y$.
Or en composant par L, on trouve que $L^{p_0}(L(y)) = L(y)$. Donc, $L(y)$ est un point fixe de L^{p_0} et par unicité du point fixe, on a $L(y) = y$. Réciproquement, tout point fixe de L est un point fixe de L^{p_0}.
Donc y est l'unique point fixe de L et y est l'unique solution définie sur $[a,b]$ de (E).

- Revenons au cas où I est un intervalle quelconque.

Existence : Pour tout $J \subset I$ compact et contenant 0, il existe une unique solution y_J définie sur J. On pose $\forall t \in I,\ y(t) = y_J(t)$ où on choisit $J \subset I$ tel que $t \in J$.
Le choix de J n'a pas d'importance. En effet, si J_1 et J_2 sont deux compacts contenant t alors les solutions y_{J_1} et y_{J_2} associées coïncident sur $J_1 \cap J_2$. La fonction y alors définie est solution de $y'(t) = f(t, y(t))$ et vérifie $y(0) = y_0$. D'où l'existence.
Unicité : Soient y_1, y_2 deux solutions de (E) sur I tout entier.

> **Lemme de Gronwall :** Soient f, g, h trois fonctions continues sur I, à valeurs positives et telles que $\forall t \in I,\ h(t) \leqslant f(t) + \displaystyle\int_{t_0}^t g(s)h(s)\,\mathrm{d}s$. Alors,
> $$\forall t \in I,\ h(t) \leqslant f(t) + \int_{t_0}^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}s$$
> En particulier si f est constante égale à $c \geqslant 0$ alors $\forall t \in I,\ h(t) \leqslant c\exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)$.

$$\begin{aligned}\forall t \in I,\ \|(y_1 - y_2)(t)\| = \|L(y_1 - y_2)(t)\| &\leqslant \left|\int_0^t \|A(s)y_1(s) - A(s)y_2(s)\|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^t \underbrace{|||A(s)|||}_{=g(s)}\,\underbrace{\|(y_1 - y_2)(s)\|}_{h(s)}\,\mathrm{d}s\right|\end{aligned}$$

On applique le lemme de Gronwall et comme $c = 0$, on obtient $\forall t \in I,\ \|(y_1 - y_2)(t)\| \leqslant 0$.
Finalement, $y_1 = y_2$ sur I. D'où l'unicité. $\square$