Le critère de Weyl consiste en un critère pour qu'une suite soit uniformément répartie modulo 1, c'est-à-dire que le nombre de termes dans un intervalle de $[0, 1[$ soit proportionnel à la longueur de cet intervalle. Le développement consiste en une équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Les leçons valides sont :

209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

On utilise explicitement le théorème de Weierstrass trigonométrique, conséquence directe du théorème de Féjer, et on approche la fonction indicatrice par deux fonctions continues. Parallèlement, on utilise également l'approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier, issue de la construction de l'intégrale de Riemann !

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Les rapports du jury appellent d'eux-même à un développement sur l'équirépartition : « *Les candidats solides pourront s'intéresser par exemple à l'équirépartition* ».

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

On utilise clairement les séries de Fourier, et le théorème de Weierstrass trigonométrique, conséquence directe du théorème de Féjer.

Dreveton, Lhabouz le suggérait dans la leçon **224** Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions. mais je trouve que c'est un détournement du titre de la leçon.

La référence usuelle est Francinou, Gianella et Nicolas 2007, *Analyse 2*, qui traite aussi l'exemple des $\langle n\gamma \rangle$, équiréparti si et seulement si γ est irrationnel, mais **attention** elle contient une erreur ($p \in \cancel{\mathbb{N}^*}$ $\mathbb{Z}^*$) et expédie la fin. **J'ai fait le choix, pour corriger cela, de présenter une autre version d'énoncé et de preuve du critère**, en parlant d'équidistribution modulo 1 d'une suite réelle et non d'équidistribution d'une suite dans $[0, 1[$. Il est bien évidemment équivalent d'étudier une suite réelle modulo 1 et la suite de ses parties fractionnaires sur $[0, 1[$, mais dans la pratique cela nous évite des élucubrations autour de l'approximation d'une fonction non-périodique par le théorème de Weierstrass... Ici, on prolongera toutes nos fonctions par 1-périodicité, et basta. Ainsi, les détails diffèrent du FGN (faire attention à bien préciser les prolongements par périodicité) mais on se libère de la pédanterie finale.

La méthode suit au final celle du très bon ouvrage Stein et Shakarchi 2003, *Fourier Analysis*, qui contient des exercices et problèmes supplémentaires, malheureusement non corrigés, ainsi que des interprétations en termes d'ergodicité d'un système dynamique, qui peut faire écho au théorème ergodique de Von Neumann présent dans Beck, Malick et Peyré 2005, *Objectif Agrégation* (leçons 208, 213), ou en physique avec l'angle d'un rayon lumineux. Pour aller plus loin, la bible de l'équirépartition est le livre de Kuipers et Niederreiter 1974, *Uniform distribution of sequences*. En français, on se passionnera par Rauzy 1976, *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*.

1 Définition

Définition 1

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est dite **équidistribuée** ou *uniformément répartie* sur $[a,b]$ si pour tout intervalle $[c,d[\ \subset [a,b]$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\{1\leqslant n\leqslant N : u_n \in [c,d[\}}{N} = \frac{d-c}{b-a}.$$

Dans la suite de cette section, on s'intéressera à l'équirépartition sur $[0,1[$, ou modulo 1 : une suite est équidistribuée modulo 1 si pour tout intervalle $[a,b[\subset [0,1[$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\{1\leqslant n\leqslant N : \langle u_n\rangle \in [a,b[\}}{N} = b-a.$$

Remarquons qu'il est équivalent d'étudier l'équidistribution d'une suite réelle modulo 1 ou de la suite des parties fractionnaires de ses termes dans $[0,1[$.

2 Le critère de Weyl

On énonce ainsi le critère de Weyl, donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit équidistribuée modulo 1. Pour prouver ce résultat, on introduit un autre critère pour l'équidistribution modulo 1, qui permet de se ramener à un problème d'analyse.

Théorème 2 (Francinou, Gianella *et* Nicolas 2007, *Ex 17*)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est équidistribuée modulo 1 ;

(ii) pour toute fonction continue et 1-périodique $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\ ; \tag{1}$$

(iii) pour tout entier $k\neq 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k u_n} = 0. \tag{2}$$

Le critère de Weyl correspond à l'équivalence entre (i) *et* (iii). *Le critère intermédiaire est nommé critère intégral de Riemann.*

Démonstration : Montrons (i) $\implies$ (ii). Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite équidistribuée modulo 1. Commençons par prouver l'égalité pour f fonction caractéristique d'un intervalle.

Soit $]a,b[$ un intervalle de $[0,1]$ et notons $\chi_{]a,b[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $]a,b[$, que l'on prolonge par 1-périodicité. Par conséquence, on peut noter que

$$\#\{1\leqslant n\leqslant N : \langle u_n\rangle \in]a,b[\} = \sum_{n=1}^{N} \chi_{]a,b[}(u_n).$$

De plus, $\int_0^1 \chi_{]a,b[}(x)\ \mathrm{d}x = b - a$. Ainsi, on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{]a,b[}(u_n) = \int_0^1 \chi_{]a,b[}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Par linéarité, l'équation 1 est vraie pour toute fonction en escalier. Montrons là enfin pour tout fonction continue. Soit f une fonction continue 1-périodique. Sans perte de généralité, on considère sa restriction sur $[0,1]$, que l'on note également f. Soit $\varepsilon > 0$. Par construction de l'intégrale de Riemann, il existe deux fonctions en escalier f_1 et f_2 définies sur $[0,1]$, telles que pour tout $x \in [0,1]$, $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, et également telle que $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$. On a alors la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - \varepsilon \leqslant \int_0^1 f_1(x)\ \mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(u_n) \\
&\leqslant \liminf_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) \leqslant \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(u_n) \\
&\leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(u_n) = \int_0^1 f_2(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x + \varepsilon
\end{aligned}$$

Le choix de ε étant arbitraire, on obtient alors l'égalité 1.

Montrons (ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle, et supposons que 1 est vraie pour toute fonction continue $1-$périodique. Comme précédemment, on souhaite approcher la fonction indicatrice de tout intervalle de $[0,1]$ par une fonction continue. Sans perte de généralité, on considère la restriction de f à $[0,1]$.

Soient $[a,b[$ un intervalle de $[0,1]$, et $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions continues f_1 et f_2 sur $[0,1]$, telles que $f_1(0) = f_1(1)$ et $f_2(0) = f_2(1)$, qui approchent $\chi_{[a,b[}$ à ε près, c'est-à-dire qui vérifient pour tout $x \in [0,1]$, $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$, et $\int_0^1 f_2(x) - f_1(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 2\varepsilon$. On prolonge alors ces fonctions par $1-$périodicité sur $\mathbb{R}$. Ces fonctions vérifient

$$b - a - 2\varepsilon \leqslant \int_0^1 f_2(x)\ \mathrm{d}x - 2\varepsilon \leqslant \int_0^1 f_1(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_2(x) \leqslant \int_0^1 f_1(x)\ \mathrm{d}x + 2\varepsilon\ \mathrm{d}x \leqslant b - a + 2\varepsilon.$$

Comme $S_N(a,b) = \#\{1 \leqslant n \leqslant N : \langle u_n \rangle \in [a,b[\} = \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b[}(u_n)$, on a les inégalités

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(u_n) \leqslant \frac{S_N(a,b)}{N} \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(u_n).$$

Ainsi, par l'hypothèse, on obtient

$$b - a - 2\varepsilon \leqslant \int_0^1 f_1(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_1(u_n) \leqslant \liminf_{N\to+\infty} \frac{S_N(a,b)}{N}.$$

De même, par hypothèse on a la majoration

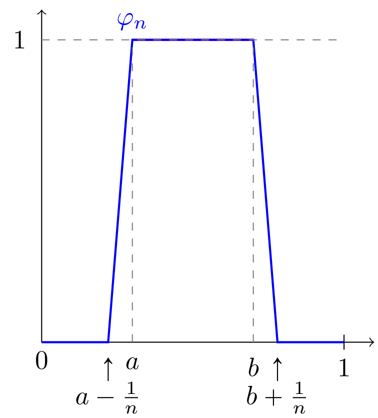
$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{S_N(a,b)}{N} \leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_2(u_n) = \int_0^1 f_2(x)\ \mathrm{d}x \leqslant b - a + 2\varepsilon.$$

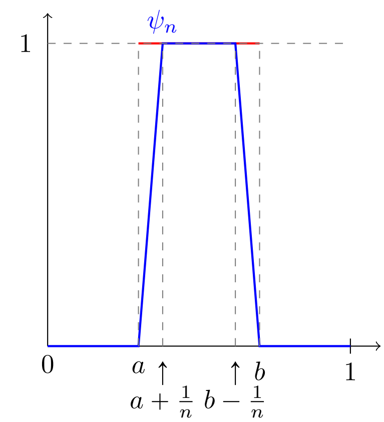
Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient l'existence de la limite, d'où $\lim_{N\to+\infty} \frac{S_N(a,b)}{N} = b - a$, et la suite est équidistribuée.

On pourra préciser ces fonctions par des jolis graphes colorés tracés au tableau, le jour de l'oral.

De telles fonctions peuvent être construites explicitement. Considérons d'abord le cas $I = [a, b[$, avec les valeurs $0 < a < b < 1$. On considère les suites de fonctions continues $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \in [0, a - \frac{1}{n}] \cup [b + \frac{1}{n}, 1] \\ 1 \text{ pour } x \in [a, b] \\ \text{affine sur } [a - \frac{1}{n}, a] \text{ et } [b, b + \frac{1}{n}] \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \in [0, a] \cup [b, 1] \\ 1 \text{ pour } x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \\ \text{affine sur } [a, a + \frac{1}{n}] \text{ et } [b - \frac{1}{n}, b] \end{cases}$$

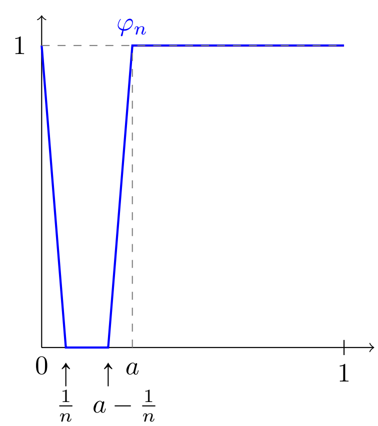


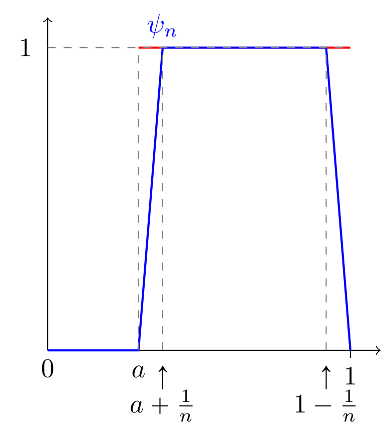


Alors, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{s} \leqslant \varepsilon$, et on prend alors $f_1 = \psi_s$ et $f_2 = \varphi_s$.

Si $I = [a, 1[$ pour $a > 0$, on doit alors considérer des suites de fonctions similaires, mais où la 1-périodicité joue un rôle crucial. On considère les suites de fonctions continues $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \in [\frac{1}{n}, a - \frac{1}{n}] \\ 1 \text{ pour } x = 0 \text{ ou } x \in [a, 1] \\ \text{affine sur } [0, \frac{1}{n}] \text{ et } [a - \frac{1}{n}, a] \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \in [0, a + \frac{1}{n}] \text{ ou } x = 1 \\ 1 \text{ pour } x \in [a + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \\ \text{affine sur } [a, a + \frac{1}{n}] \text{ et } [1 - \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$





On traite de manière symétrique le cas $I = [0, b[$, avec $b < 1$. Le cas où $I = [0, 1]$ est évident. Dans tous les cas, on a construit des fonctions continues sur $[0, 1]$, vérifiant $f(0) = f(1)$, et qui coïncident avec $\chi_{[a,b[}$ sauf sur des intervalles de longueur totale 2ε.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Pour tout entier $k \neq 0$, la fonction $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ s'écrit $e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx)$, somme de deux fonctions continues sur $[0, 1]$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer (ii) **à chaque fonction**, et par linéarité de la somme et de l'intégrale, on obtient, pour tout $k \neq 0$:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi ku_n} = \int_0^1 e^{2i\pi kt} dt = \left[\frac{e^{2i\pi kt}}{2i\pi k} \right]_{t=0}^{1} = 0.$$

(iii) $\implies$ **(ii)** Supposons que pour tout $k \neq 0$, $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k u_n} = 0$. On a donc l'égalité 1 car $\int_0^1 e^{2i\pi kt}\,\mathrm{d}t = 0$. C'est également trivialement le cas pour $k = 0$, car $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi 0 u_n} = 1 = \int_0^1 e^{2i\pi 0t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, on a bien $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ pour toute fonction $x \mapsto e^{2i\pi kx}$. Par linéarité, c'est également le cas pour tout polynôme trigonométrique.

Soit f une fonction continue 1-périodique sur $\mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Weierstrass trigonométrique, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon/3$. Par ce qui précède, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) - \int_0^1 P(t)dt\right| \leqslant \varepsilon/3.$$

Alors, pour tout $n \geqslant N$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \int_0^1 f(t)dt\right| &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(u_n) - P(u_n)| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) - \int_0^1 P(t)dt\right| + \int_0^1 |P(t) - f(t)|\,dt \qquad (3)\\ &\leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3. \qquad (4)\end{aligned}$$

Cela prouve le résultat. ■

3 Applications

Soit $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On considère la suite des multiples de γ modulo 1, ce qui correspond à la suite des parties fractionnaires de ces multiples :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \langle n\gamma \rangle.$$

À partir du critère de Weyl, il est facile de montrer que cette suite est équidistribuée sur $[0, 1[$.

Proposition 3

Soit $\gamma > 0$. La suite $(n\gamma)_n$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $\gamma \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration : Si $\gamma \in \mathbb{Q}$, la suite $(u_n)_n$ est périodique, donc *a fortiori* non dense, et ainsi non équirépartie modulo 1.

Soit $\gamma \notin \mathbb{Q}$. On va utiliser le critère de Weyl, ce qui est aisé car on se ramène à la somme de termes d'une suite géométrique. En effet, comme $\gamma \notin \mathbb{Q}$, pour tout $k \neq 0$, on a $e^{2\pi ik\gamma} \neq 1$. Soit $k \in \mathbb{Q}$. On obtient, par somme d'une suite géométrique :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ikn\gamma} = \frac{e^{2\pi ik\gamma}}{N}\frac{1 - e^{2\pi ikN\gamma}}{1 - e^{2\pi ik\gamma}}.$$

Or, $|e^{2\pi ikN\gamma}| = 1$, donc la suite $\frac{1-e^{2\pi ikN\gamma}}{1-e^{2\pi ik\gamma}}$ est bornée. Ainsi, le membre de droite de l'égalité tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, donc par le critère de Weyl, la suite $(n\gamma)$ est équirépartie modulo 1, donc la suite $\langle n\gamma \rangle$ est équidistribuée dans $[0, 1[$. ■

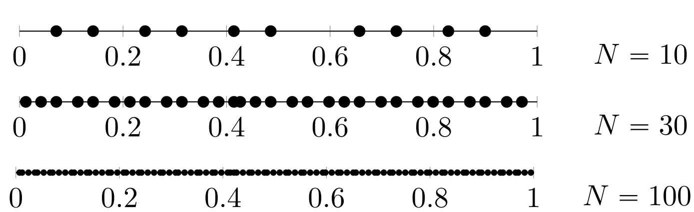


FIGURE 1 - *Premiers éléments de la suite* $(n\sqrt{2})_{n\leqslant N}$

On peut de même s'intéresser à d'autres exemples, comme l'équidistribution de la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

On prouve ici, directement avec le critère de Weyl, que toute suite de la forme $(\langle n^\sigma \rangle)_n$ avec $\sigma < 1$ est équidistribuée sur $[0,1[$.

Proposition 4 (Stein *et* Shakarchi *2003, Chp 4, Ex 8*)

Soit $a \neq 0$ et $0 < \sigma < 1$. La suite $(an^\sigma)_n$ est équidistribuée modulo 1.

Démonstration : On va étudier la somme $\sum_{n=1}^N e^{2\pi i b n^\sigma}$ (pour tout $b \neq 0$), en la comparant avec l'intégrale correspondante afin d'obtenir la convergence vers 0.
Soit $b \neq 0$. D'un côté, on a :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi bn^\sigma} - \int_1^N e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}(e^{2i\pi bn^\sigma} - e^{2i\pi bx^\sigma})\,\mathrm{d}x + e^{2i\pi bN^\sigma}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\left|e^{2i\pi bn^\sigma} - e^{2i\pi bx^\sigma}\right|\,\mathrm{d}x + 1.$$

Par l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto e^{2i\pi bt^\sigma}$, on a :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi bn^\sigma} - \int_1^N e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} 2\pi|b||n^\sigma - x^\sigma|\,\mathrm{d}x + 1.$$

De là, on obtient une borne en N^σ pour ce terme, par :

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} 2\pi|b||n^\sigma - x^\sigma|\,\mathrm{d}x + 1 \leqslant 2\pi|b|\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}(n+1)^\sigma - n^\sigma\,\mathrm{d}x + 1 \leqslant 2\pi|b|N^\sigma - 2\pi|b| + 1.$$

De même, en effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_1^N e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x &= \int_1^N \frac{x^{1-\sigma}}{2\pi ib\sigma}(2\pi ib\sigma)x^{\sigma-1}e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{1-\sigma}}{2\pi ib\sigma}e^{2i\pi bx^\sigma}\right]_{x=1}^N - \int_1^N \frac{(1-\sigma)x^{-\sigma}}{2\pi ib\sigma}e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\int_1^N e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\frac{N^{1-\sigma}e^{2i\pi bN^\sigma} - e^{2i\pi b}}{2i\pi b\sigma}\right| + \int_1^N \frac{(1-\sigma)x^{-\sigma}}{|2i\pi b\sigma|}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{N^{1-\sigma}+1}{2\pi|b|\sigma} + \frac{(1-\sigma)}{2\pi|b|\sigma}N^{1-\sigma}.\end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\left|\sum_{n=1}^N e^{2i\pi bn^\sigma}\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^N e^{2i\pi bn^\sigma} - \int_1^N e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^N e^{2i\pi bx^\sigma}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\pi|b|N^\sigma + \frac{(2-\sigma)N^{1-\sigma}+1}{2\pi|b|\sigma}.$$

On peut alors utiliser le critère de Weyl. Pour tout $k \neq 0$, on a :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2i\pi kan^\sigma}\right| \leqslant 2\pi|ka|N^{\sigma-1} + \frac{(2-\sigma)N^{-\sigma}+1}{2\pi|ka|\sigma} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où la convergence est assurée car $0 < \sigma < 1$. Ainsi, la suite est équidistribuée modulo 1. ■

Le critère de Weyl permet également de démontrer le caractère non-équiréparti d'une suite.

Proposition 5 (Stein *et* Shakarchi 2003, *Chp 4, Ex 9*)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $(a \log n)_n$ n'est pas équidistribuée modulo 1.

Démonstration : On procède de la même manière que précédemment. Si $a = 0$, la suite est nulle donc non équidistribuée. Supposons a non nul. Soit $b \neq 0$. On réécrit la somme comme suit :

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi b \log n} = \int_1^N e^{2i\pi b \log x} \, \mathrm{d}x + \left(\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi b \log n} - \int_1^N e^{2i\pi b \log x} \, \mathrm{d}x \right).$$

D'un côté, on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi b \log n} - \int_1^N e^{2i\pi b \log x} \, \mathrm{d}x \right| &= \left| \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} (e^{2i\pi b \log n} - e^{2i\pi b \log x}) \, \mathrm{d}x + e^{2i\pi b \log N} \right| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left| e^{2i\pi b \log n} - e^{2i\pi b \log x} \right| \, \mathrm{d}x + 1. \end{aligned}$$

Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto e^{2i\pi b \log t}$, on obtient une borne en $\log N$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi b \log n} - \int_1^N e^{2i\pi b \log x} \, \mathrm{d}x \right| &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} 2\pi |b| |\log x - \log n| \, \mathrm{d}x + 1 \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} 2\pi |b| \log n + 1 - \log n \, \mathrm{d}x + 1 \\ &\leqslant 2\pi |b| \log N + 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi b \log n} - \int_1^N e^{2i\pi b \log x} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant 2\pi |b| \frac{\log N}{N} + \frac{1}{N} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5}$$

D'un autre côté,

$$\frac{1}{N} \int_1^N e^{2i\pi b \log x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{N} \int_1^N x^{2i\pi b} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{N} \frac{N^{2i\pi b+1} - 1}{2i\pi b + 1} = \frac{N^{2i\pi b} - \frac{1}{N}}{2i\pi b + 1}$$

Or, $|N^{2i\pi b}| = |e^{2i\pi b \log N}| = 1$, donc $N^{2i\pi b}$ ne tend pas vers 0.
Le terme $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi b \log n}$ est somme de 5 qui tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ et d'un terme qui ne tend pas vers 0. Ainsi, pour tous $a, k \neq 0$,

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} e^{2i\pi k a \log n} \neq 0.$$

La suite $(\langle a \log n \rangle)_n$ n'est pas équidistribuée modulo 1. ∎

4 Questions possibles

Montrer qu'une suite équirépartie sur $[0, 1[$ est dense sur cet intervalle.

Considérons un sous-intervalle $[a, b[\subset [0, 1]$, avec $a < b$. Comme $\frac{\#\{1 \leqslant n \leqslant N \;:\; u_n \in [a,b[\}}{N}$ tend vers $b - a > 0$, il existe un rang M tel que $\#\{1 \leqslant n \leqslant N \;:\; u_n \in [a, b[\} > 0$ pour $N \geqslant M$. Ainsi, il existe au moins un indice n tel que $u_n \in [a, b[$. Ainsi, il existe un élément de $\{u_n, n \geqslant 1\}$ dans tout sous-intervalle de $[0, 1]$: la suite est dense.

Comment pourrait-on montrer que la suite $\langle n\gamma\rangle$ est dense dans $[0,1[$ sans utiliser le critère de Weyl ?
par le principe du tiroir, pour tout entier naturel m, il existe $i,j \in \{0,\dots,m+1\}$ distincts et $k \in \{0,\dots,m-1\}$ tels que $\langle i\gamma\rangle, \langle j\gamma\rangle \in [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}[$. On a alors $\langle (i-j)\gamma\rangle < \frac{1}{m}$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x - \langle n(i-j)\gamma\rangle| < \frac{1}{m}$. Tout point de $[0,1[$ est à distance d'au plus $\frac{1}{m}$ de l'ensemble $\{\langle n(i-j)\gamma\rangle, n \in \mathbb{Z}\}$. Ceci étant vrai pour tout m ; pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant un m suffisamment grand tel que $\frac{1}{m} < \varepsilon$, on trouve que l'ensemble $\{\langle n\gamma\rangle, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0,1[$.
cf. https://math.stackexchange.com/questions/189397/why-is-this-quotient-space-not-hausdorff

Quelle interprétation avec des variables aléatoires ?
Laissé en exercice aux probabilistes.

Comment peut-on interpréter le fait que la suite $(\langle \log n\rangle)_n$ ne soit pas équirépartie ?
Quand $N \to +\infty$, $\log N$ croit très lentement (le graphe de log vers l'infini est presque plat), donc de très nombreux termes vont s'accumuler dans le même décile d'un intervalle. Ce phénomène peut se constater lorsque l'on trace l'histogramme des 250 000 ou 500 000 premiers termes de u_n : de nombreux termes vont s'accumuler dans le décile $[0, 0.1[$, avant d'en accumuler encore plus dans le décile $[0.1, 0.2[\dots$

On peut quantifier cela : si $\langle \log N\rangle = c$, pour k suffisamment petit de sorte que $kc < 1$ (afin de rester dans la même unité, ie. que la partie fractionnaire ne nous fasse pas sauter au 0 suivant), on atteint $kc = k\langle \log N\rangle = \langle \log N^k\rangle$. Donc si $\langle \log N\rangle \sim 0.01$, il faut aller à N^{10} pour atteindre le décile suivant $\langle \log N^{10}\rangle \sim 0.1$.

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $[0,1]$ est équidistribuée modulo 1 si et seulement si pour toute fonction intégrable au sens de Riemann $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
Une fonction continue et 1-périodique est évidemment intégrable au sens de Riemann sur une période $[0,1]$; et le critère précédent s'applique. Réciproquement, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable, et $(u_n)_n$ une suite équidistribuée modulo 1. Soit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$. Posons les fonctions suivantes f_U et f_L définies par :

$$f_U(x) = \sup_{x_{j-1}\leqslant y\leqslant x_j} f(y) \quad \text{pour } x \in [x_{j-1}, x_j[\quad \text{et} \quad f_L(x) = \inf_{x_{j-1}\leqslant y\leqslant x_j} f(y) \quad \text{pour } x \in [x_{j-1}, x_j[.$$

On a alors $f_L \leqslant f \leqslant f_U$, et donc $\int_0^1 f_L(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f_U(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une subdivision de $[0,1]$ telle que

$$\int_0^1 f_U(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_L(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

Comme f_L et f_U sont des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'intervalles, comme prouvé précédemment (cf. **(i)** $\implies$ **(ii)** du théorème précédent), on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_L(u_n) = \int_0^1 f_L(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_L(u_n) = \int_0^1 f_U(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc le résultat suivant :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_U(u_n) - \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_L(u_n) \leqslant \varepsilon,$$

d'où $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Comment construire une suite telle que $\frac{S_N(a,b)}{N}$ tende vers une fonction de a et de b, qui n'est pas $b-a$?
Soit $(u_n)_n$ une suite équidistribuée sur $[0,1[$. On considère $(v_n)_n$ définie par :

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ u_k & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Alors la moitié des termes de la suite sont nuls, et on obtient $\lim_{N\to+\infty} \frac{S_N(a,b)}{N} = \frac{b-a}{2}$. Cela contraste avec la suite $(\langle \log n \rangle)_n$ ci-dessus, pour qui $\frac{S_N(a,b)}{N}$ n'admet pas de limite.

Bibliographie

BECK, Vincent, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ (2005). *Objectif agrégation : mathématiques*. fre. 2e éd. Paris : H & K. ISBN : 9782914010924.

FRANCINOU, Serge, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS (2007). *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des écoles normales supérieures, Analyse. Tome 2*. fre. 2e éd. Enseignement des mathématiques 11. Paris : Cassini. ISBN : 9782842251413.

KUIPERS, Lauwerens et Harald NIEDERREITER (1974). *Uniform distribution of sequences*. Pure and applied mathematics. New York : Wiley. ISBN : 9780471510451.

RAUZY, Gérard (1976). *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*. fre. Collection Sup Le Mathématicien 15. Paris (France) : Presses universitaires de France. ISBN : 9782130339076.

STEIN, Elias M. et Rami SHAKARCHI (2003). *Fourier analysis : an introduction*. eng. Princeton lectures in analysis 1. Princeton : Princeton University Press. ISBN : 9780691113845.