Déterminant circulant et suite de polygones

- Gourdon, *Algèbre.* (148-149)
- Isenmann, Pecatte, *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* (388-394)

Déterminant circulant : Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors,

$$|C| = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Démonstration.

On pose $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$.

Alors, $P(J) = C$ et $J^n = I_n$.
Donc $\chi_J(X) = X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.
De plus, J se diagonalise en $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1})$ (les racines primitives de l'unité).
Par conséquent, $P(J)$ se diagonalise en $P(D)$.
Donc $\det(P(J)) = \det(P(D)) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$. □

Soit P un polygone convexe du plan complexe dont les sommets sont $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. On définit une suite de polygones $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $P_0 = P$ et les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. Alors, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge l'isobarycentre de P.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. On représente P_k par un vecteur $Z_k = {}^t(z_{1,k}, \ldots, z_{n,k})$.
On souhaite alors montrer que $Z_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} {}^t(g, \ldots, g)$ où $g = \dfrac{z_1 + \cdots + z_n}{n}$ est l'isobarycentre de P. On a

$$Z_{k+1} = {}^t\left(\frac{z_{1,k} + z_{2,k}}{2}, \ldots, \frac{z_{n,k} + z_{1,k}}{2}\right) = AZ_k \qquad \text{avec } A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N},\ Z_k = A^k Z_0$.
Il suffit alors de montrer que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ (une norme d'algèbre quelconque car toutes équivalentes).

- Étudions les valeurs propres de A :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n) = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1-2X \end{pmatrix} = |C|$$

où C est une matrice circulante (avec $a_0 = \frac{1}{2} - X$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall k \geqslant 2,\ a_k = 0$).
Ainsi par le lemme, $\chi_A(X) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(a_0 + a_1\omega^j) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - X + \frac{1}{2}\omega^j\right) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - X)$

avec $\lambda_j = \dfrac{1 + \omega^{j-1}}{2}$.

Comme $\lambda_i = \lambda_j \iff i = j$ alors le polynôme χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. Il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Or, $\forall j \in [\![2, n]\!],\ |\lambda_j| = \left|\dfrac{1+\omega^{j-1}}{2}\right| = \left|e^{\frac{i(j-1)\pi}{n}} \dfrac{e^{\frac{i(j-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{i(j-1)\pi}{n}}}{2}\right| = 1 \times \left|\cos\left(\dfrac{(j-1)\pi}{n}\right)\right| < 1$
car $0 < j-1 < n$. Donc, $\forall j \in [\![2, n]\!],\ \lambda_j^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lambda_1^k = \dfrac{1+e^{i0\pi}}{2} = 1$.
Ainsi, $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $B = Q\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, 1)Q^{-1}$ (par continuité de $M \mapsto Q^{-1}MQ$).

- Posons $X = BZ_0$. Ainsi, $Z_k = A^k Z_0 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} X$.

Par continuité de la multiplication matricielle à gauche et passage à la limite, $Z_{k+1} = AZ_k$ donne $X = AX$.
X est vecteur propre de l'espace propre de A associé à 1, qui contient ${}^t(1, \ldots, 1)$ et est de dimension 1 (car χ_A possède n racines distinctes).
Ainsi, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $X = {}^t(a, \ldots, a)$.
Donc, $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point d'affixe a.

- Enfin montrons que g est aussi l'isobarycentre de tous les polygones P_k.

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, notons g_k l'isobarycentre de P_k (en considérant les indices modulo n).

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{i,k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i,k} + z_{i+1,k}}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{i,k} = g_k$$

Comme $g_0 = g$ et que la fonction qui a n points de $\mathbb{C}$ associe son isobarycentre est continue, alors $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de $(a, \ldots, a)$ i.e. a. Ainsi, $g = a$. $\square$