L'exponentielle induit un homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

- Isenmann, Pecatte, *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* (183-184)

L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration.

- L'application est bien définie. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $S = PD^tP$. Donc, $\exp S = P \exp(D)^tP = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})^tP \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
De plus, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ e^{\lambda_i} > 0$ donc $\exp S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (car $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).

- L'application exp est continue par restriction de exp sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- L'application exp est injective. Soit $S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\exp S' = \exp S$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S. Soit L un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ L(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$.
Comme $L(\exp S')$ est un polynôme en S' alors S' commute avec

$$\begin{aligned} L(\exp S') &= L(\exp S) \\ &= L\big(P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})^tP\big) && \text{par le théorème spectral} \\ &= PL\big(\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\big)^tP \\ &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^tP = S \end{aligned}$$

Donc, S et S' commutent et sont alors co-diagonalisables. Ainsi, il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = Q\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1}$ et $S' = Q\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)Q^{-1}$.
Comme $\exp S = \exp S'$ alors $\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) = \mathrm{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_n})$.
Ainsi, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$ donc $\lambda_i = \mu_i$. D'où $S = S'$.

- L'application exp est surjective. Soit $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Le théorème spectral donne $T = P\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)^tP$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_i > 0$.
On pose $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \ln(\mu_i)$ et $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^tP$. Donc $\exp S = T$.

- Montrons que exp est un homéomorphisme. Montrons alors que l'inverse est continue.

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $T = \exp S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exp(S_k) = T_k$.
Montrons que $S_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} S$.
Comme $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée pour $|||\cdot|||_2 = \rho(\cdot)$ par le lemme. Ainsi, les spectres des matrices T_k sont majorés par une constante $C > 0$.
En appliquant le même raisonnement à $T_k^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} T^{-1}$ (inverse continue dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$), on majore ses spectres par $1/C'$.
Ainsi, les valeurs propres des matrices T_k sont dans $[C', C] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc celles des S_k sont dans $[\ln C', \ln C]$. Par conséquent, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $|||\cdot|||_2$.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $S_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} S_0$.
Par continuité de l'exponentielle, on a $\exp S_0 = T = \exp S$ et par injectivité, $S = S_0$.
On a montré la continuité de l'inverse par caractérisation séquentielle de la continuité. $\square$

Remarque.

- Il y a d'autres homéomorphismes concernant l'exponentielle :
  exp : $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ (matrices hermitiennes), exp : $\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ (matrices nilpotentes et unipotentes).
  Et son inverse, le logarithme réalise aussi un homéomorphisme des matrices antisymétriques réelles dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Le prolongement de ces résultats est la théorie des groupes de Lie. L'exponentielle fait le lien entre un groupe G de Lie (groupe doté d'une structure de variété différentielle où la multiplication et l'inversion sont différentiables) et son algèbre $Lie(G)$ de Lie (e.v. muni d'une l.c.i.). On a alors exp : $Lie(G) \to G$.
  Exemple : si le groupe de Lie est $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ alors son algèbre de Lie est $(\mathbb{R}, +)$ et l'application exponentielle est l'application exponentielle classique de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.

Théorème spectral : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors, il existe une base orthonormale de E consituée de vecteurs propres de u.

Démonstration. On fait une récurrence sur $n = \dim E$.
Supposons H_{n-1} vraie et utilisons le lemme :
Si $n \geqslant 2$. Si λ_1 est valeur propre de $u \in \mathcal{S}(E)$ et e_1 est le vecteur propre de norme 1, alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est u-stable et $u_{|H}$ est symétrique.
On écrit donc $E = \mathbb{R}e_1 \oplus H$ avec H u-stable. Il existe donc une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de H telle que $u_{|H}$ soit diagonale par H_{n-1}. On pose $\mathcal{B} = \{e_1\} \cup \mathcal{B}_1$ une base orthonormée de E. $\square$

Proposition : Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ssi toutes ses valeurs propres sont positives.

Démonstration.
($\Rightarrow$) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S (car toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles). Il existe $x \in \mathbb{R}_n \backslash \{0\}$ tel que $Sx = \lambda x$.
Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $0 \leqslant \langle Sx \mid x \rangle = \lambda \|x\|^2$.

($\Leftarrow$) Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthonormée de vecteurs propres. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors,

$$\langle Sx \mid x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

$\square$