Décomposition polaire

- Isenmann, Pecatte, *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* (128-129)

> **Lemme :** Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe un unique $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = B$.

Démonstration.
- **Unicité :** Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $S_1^2 = B$ et $S_2^2 = B$.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S_1 = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^tP$ où $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i > 0$ (car $S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).
On pose L le polynôme interpolateur de Lagrange défini par $\forall i \in [\![1, n]\!],\ L(\lambda_i^2) = \lambda_i$.

$$\begin{aligned} S_2 \text{ commute avec } L(S_2^2) &= L(S_1^2) = L((P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^tP)^2) \\ &= L(P\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)^tP) \\ &= P\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^tP = S_1 \end{aligned}$$

Comme S_1 et S_2 commutent et sont diagonalisables (par le théorème spectral) alors elles sont co-diagonalisables donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S_1 = Q\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q^{-1}$ et $S_2 = Q\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)Q^{-1}$.
Ainsi, $S_1^2 = S_2^2$ donne $\mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) = \mathrm{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$ i.e. $\forall i,\ \lambda_i^2 = \mu_i^2$, or $\lambda_i, \mu_i > 0$ (car $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) alors $\lambda_i = \mu_i$. D'où $S_1 = S_2$.

- **Existence :** D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = PD^tP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i > 0$.

Posons $S = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^tP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Alors $S^2 = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2\ {}^tP = PD^tP = B$. D'où l'existence. □

> **Décomposition polaire :** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \exists S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}),\ A = OS$.
> Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors cette décomposition est unique et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration.
- Supposons que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi d'après le lemme, il existe un unique $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = {}^tAA$.

Posons $O = AS^{-1}$. On a alors

$${}^tOO = {}^t(S^{-1})^tAAS^{-1} = {}^t(S^{-1})S^2S^{-1} = I_n$$

Ainsi, $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $A = OS$. Comme O est uniquement déterminé par A et S, alors l'unicité de S donne celle de O.

- **Cas général :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(A_k)_k \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers A.
D'après le premier point, $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists S_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \exists O_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ A_k = O_kS_k$.
Or $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, alors il existe une sous-suite qui converge vers $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Et $(O_{\varphi(k)}^{-1}A_{\varphi(k)})_k$ converge vers $O^{-1}A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est fermé et car l'inversion d'une matrice (application polynomiale par la comatrice) et le produit sont continus.
On pose $S = O^{-1}A$. □