Densité des fonctions continues nulle part dérivables

- Queffélec, Zuily, *Analyse pour l'agrégation.* (271-272)

> On note A l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$.
> Alors A contient une intersection dénombrable d'ouverts dense de $\mathcal{C}^0([0,1])$.
> Et A est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Démonstration.
Comme $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$ est complet, alors par le théorème de Baire, il suffit de montrer que A^c est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.
Comme A^c est l'ensemble des fonctions continues dérivables en au moins un point de $[0,1]$ alors pour $f \in A^c$, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $\dfrac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y}$ est bornée lorsque $y \to x_0$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \exists x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ |f(x)-f(y)| \leqslant n|x-y|\}$.
Ainsi, $A^c \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$.

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, F_n est fermé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in F_n^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists x_k \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ |f_k(x_k)-f_k(y)| \leqslant n|x_k-y| \qquad (\star)$$

On a donc créé une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$, c'est un compact donc il exite une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x_0 \in [0,1]$.
Soit $y \in [0,1]$. On souhaite montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} f_{\varphi(k)}(y) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) = f(y)-f(x_0)$
On a $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\left(f_{\varphi(k)}(y) - f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)})\right) - \left(f(y)-f(x_0)\right)\right| &\leqslant |f_{\varphi(k)}(y)-f(y)| + |f_{\varphi(k)}(x_{\varphi(k)}) - f(x_{\varphi(k)})| \\
&\quad + |f(x_{\varphi(k)})-f(x_0)| \\
&\leqslant 2\underbrace{\|f_{\varphi(k)}-f\|_\infty}_{\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{|f(x_{\varphi(k)})-f(x_0)|}_{\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } f\in\mathcal{C}^0}
\end{aligned}$$

En passant à la limite dans $(\star)$ on obtient $|f(y)-f(x_0)| \leqslant n|y-x_0|$.
Donc, $f \in F_n$. Ainsi, F_n est fermé.

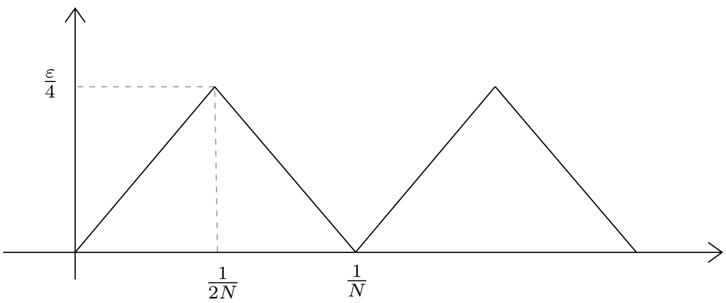
- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathring{F_n} = \varnothing$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. On va montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ B(f,\varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$. Or,

$$F_n^c = \{g \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ |f(x)-f(y)| > n|x-y|\}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, les polynômes sont denses dans les fonctions continues. Donc, il existe un polynôme P tel que $\|P-f\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
L'idée est d'ajouter à P une fonction $g_0 \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $P + g_0 \in F_n^c$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Comme $[0,1] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{N-1}\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ alors, on pose g_0 une fonction $\dfrac{1}{N}$-périodique définie par

$$g_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2N}\right] \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon N}{2}x & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2N}, \dfrac{1}{N}\right] \end{cases}$$



La fonction $g_0 \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et est dérivable sauf en un nombre fini de points et $|g_0'(x)| = \dfrac{\varepsilon N}{2}$.
De plus, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |g_0(x)| = \dfrac{\varepsilon}{4}$. On pose $g = P + g_0$. Ainsi,

$$\|f-g\|_\infty \leqslant \|f-P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

Donc $g \in B(f,\varepsilon)$.
Il reste à montrer que $g \in F_n^c$. Par l'inégalité triangulaire inverse, on a $\forall (x,y) \in [0,1]^2$,

$$\begin{aligned}
|g(y)-g(x)| &\geqslant \Big| |g_0(y)-g_0(x)| - |P(y)-P(x)| \Big| \\
&\geqslant |g_0(y)-g_0(x)| - |P(y)-P(x)| \\
&\geqslant |g_0(y)-g_0(x)| - \underbrace{M|y-x|}_{\substack{\text{inégalité des} \\ \text{accr. finis}}} \qquad \text{où } M = \sup_{x\in[0,1]} |P'(x)|
\end{aligned}$$

Pour $x \in [0,1]$ fixé, on choisit y sur le même segment $\left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$.
Sur cet intervalle, g_0 est dérivable donc par le théorème des accroissements finis, il existe c entre x et y tel que $|g_0(y)-g_0(x)| = |g_0'(c)||y-x| = \dfrac{\varepsilon N}{2}|y-x|$.
Ainsi, $\forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ |g(y)-g(x)| \geqslant \left(\dfrac{\varepsilon N}{2} - M\right)|y-x|$.
Il suffit alors de prendre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\varepsilon N}{2} - M > n$ i.e. $N > \dfrac{2(M+n)}{\varepsilon}$.
On a alors trouvé $g \in F_n^c \cap B(f,\varepsilon)$. Donc $\mathring{F}_n = \varnothing$.
En prenant le complémentaire, on a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n^c = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right)^c \subset A$.
Finalement, $(F_n^c)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts denses dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. $\square$

Remarque. $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d(4^n x, \mathbb{Z})}{4^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point.

Démonstration. (Hauchecorne p.161-162)
La fonction $g : x \mapsto d(x,\mathbb{Z})$ est 1-périodique et $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $g = |\cdot|$.
Donc, g est à valeurs dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \dfrac{g(4^n x)}{4^n}$ une fonction 1-lipschitienne et 4^{-n}-périodique.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2 \times 4^n}$$

Donc, par le théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
On a alors l'existence de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g(4^n x)}{4^n}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
En faisant le taux d'accroissement, on a pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(a+4^{-n}) - f(a)}{4^{-n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(a+4^{-n}) - u_k(a)}{4^{-n}}$$

Or le coefficient directeur de u_k est ± 1. Donc, on fait une somme de n termes égaux à ± 1. Donc, le taux d'accroissement sera soit pair (si n est pair) soit impair. Ce qui est impossible. Donc, $\dfrac{f(a+4^{-n}) - f(a)}{4^{-n}}$ n'admet pas de limite. $\square$