Prolongement de la fonction Gamma

- Beck, Malick, Peyré, *Objectif Agrégation.* (82-83)
- Queffélec, Zuily, *Analyse pour l'agrégation.* (313-316)

La fonction Γ est holomorphe sur $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
Elle se prolonge sur $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe, avec des pôles simples aux entiers $-n$, de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Démonstration.

- Montrons que Γ est holomorphe sur Ω_0. On pose $f : (z,t) \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ sur $\Omega_0 \times \mathbb{R}^{+*}$.
  - ⋆ Pour tout $z \in \Omega_0$, $t \mapsto f(z,t)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car continue).
  - ⋆ Pour pp $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω_0.
  - ⋆ Soit $K \subset \Omega_0$ un compact. Il existe $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\mathrm{Re}(K) \subset [a,b]$ (par continuité de $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ sur K un compact, il existe un min : a et un max : b). Alors, pour $z \in K$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$, on a
$$|f(z,t)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} \leqslant \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$
Comme $t^{b-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t^{a-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$ alors par comparaison (intégrales de Riemann convergentes : $1-a<1$), elle est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par le théorème d'holomorphie sous signe intégral, on a que Γ est holomorphe sur Ω_0.

- Montrons que $\forall z \in \Omega_0$, $\Gamma(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$.

Soit $z \in \Omega_0$. On a $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$.
En développant l'exponentielle, on a $\forall t \in]0,1[$, $e^{-t}t^{z-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$.
Vérifions qu'on peut intervertir la somme et l'intégrale.
$$\forall t \in]0,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| |t^{n+z-1}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t t^{\mathrm{Re}(z)-1}$$
Comme $\mathrm{Re}(z) > 0$, alors $t \mapsto e^t t^{\mathrm{Re}(z)-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.
Ainsi, grâce au théorème de Fubini (appliqué à la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage), on peut intervertir la somme et l'intégrale :
$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

- Montrons que $g : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

> Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$.
> Pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, $\exists N_K \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K et $\displaystyle\sum_{n \geqslant N_K} f_n$ converge uniformément sur K.
> Alors $\sum f_n$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$ et on peut dériver la série terme à terme.

$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n : z \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle (simple) $-n$.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N)}$.
Ainsi, $\forall n > N,\ g_n$ n'a pas de pôle dans K. De plus, $\forall z \in K$, on a $|z+n| \geqslant n-|z| \geqslant n-N$.
Donc, $\forall z \in K,\ |g_n(z)| \leqslant \dfrac{1}{n!(n-N)}$ (série convergente) et $\displaystyle\sum_{n>N} g_n$ est normalement convergente sur K. Le théorème précédent montre que g est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont tous pôles (simples) sont les entiers négatifs.

- Montrons que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\mathrm{Re}(K) \subset [-M, M]$. Alors, pour $z \in K$ et $t \geqslant 1$, on a $|f(z,t)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} \leqslant t^{M-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Par comparaison avec une intégrale de Riemann, elle est intégrable sur $[1,+\infty[$. De plus, la mesurabilité et l'holomorphie se fait exactement comme sur Ω_0.
Ainsi, par le théorème d'holomorphie sous signe intégral, $z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Or la somme de cette fonction et de g est aussi holomorphe sur $\mathbb{C}$ et comme sur Ω_0, elle coïncide avec Γ. Alors par le théorème de prolongement analytique (car $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ est connexe), on a que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}t \qquad \square$$