Nombres de Bell

- Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS Algèbre 1.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ et on prend comme convention $B_0 = 1$. Alors, on a
$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}$$

Démonstration.

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, considérons l'ensemble E_k des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ pour lesquelles la partie contenant l'élément $n+1$ est de cardinal $k+1$ (notons-la A).
On choisit les k autres éléments de la partie A qui seront avec $n+1$: donc il y en a $\binom{n}{k}$.
Il suffit ensuite de compter les partitions des $n-k$ éléments restants : soit B_{n-k}.
D'où $\mathrm{card}(E_k) = \binom{n}{k}B_{n-k}$.
Comme $E_0,\dots,E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ alors
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}$$

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n : B_n \leqslant n!$

Comme $B_0 = 1 = 0!$ alors H_0 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_0,\dots,H_n$ sont vraies. Montrons que H_{n+1} est vraie.
$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)! \qquad \text{par } H_0,\dots,H_n \\ &\leqslant n!\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{k!}}_{\leqslant 1} \leqslant n!(n+1) = (n+1)! \end{aligned}$$
donc H_{n+1} est vraie.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{B_n}{n!} \leqslant 1$. Donc, le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{B_n}{n!}z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ (qui est 1). Donc $R \geqslant 1$.

- Posons $\forall x \in]-R,R[$, la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$.

Soit $x \in]-R,R[$. Calculons $f(x)$, pour cela dérivons f :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}B_{n-k}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{B_{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

On reconnait le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{B_n}{n!}x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{x^n}{n!}$.
Ainsi, $\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = e^x f(x)$.
Donc, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = Ce^{e^x}$.
Comme $f(0) = B_0 = 1$ alors $C = e^{-1}$. Ainsi, $\forall x \in]-R,R[,\ f(x) = e^{e^x-1}$.

- Montrons que $\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$.

Comme la série entière définissant l'exponentielle a un rayon de convergence infini, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \qquad (\star)$$

Posons $\forall n, k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_{k,n}(x) = \frac{(nx)^k}{k!}$. Or $|u_{k,n}(x)| = u_{k,n}(|x|)$. En remplaçant x par $|x|$ dans $(\star)$, on trouve la sommabilité de $(u_{k,n}(x))_{k,n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini et échanger l'ordre des sommes.
Par conséquent, $\forall x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nx)^k}{n!k!}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(nx)^k}{n!k!}\right) = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\right)\frac{x^k}{k!}$$

Or, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!}x^k$. Par unicité du DSE de f, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ B_k = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}$. $\square$

Remarque.

Le triangle de Bell peut servir à calculer les nombres de Bell. On commence par écrire 1 sur la première ligne, puis chaque ligne est obtenue en commençant par le dernier nombre de la ligne précédente et pour obtenir un terme, on additionne le nombre précédent avec celui qui se trouve immédiatement au dessus de celui-ci. Chaque ligne aura ainsi un terme de plus que la ligne précédente.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	2				
2	2	3	5			
3	5	7	10	15		
4	15	20	27	37	52	
5	52	67	87	114	151	203

- La formule démontrée s'appelle *formule de Dobinski*, c'est le moment d'ordre n d'une loi de Poisson de paramètre 1.
- Ils représentent aussi le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble fini.
- Les 7 plus petits nombres de Bell premiers sont $B_2 = 2,\ B_3 = 5,\ B_7 = 877,\ B_{13},\ B_{42}$, B_{55} et B_{2841}. On ignore s'il en existe d'autres.
- Autre méthode pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n \leqslant n!$

On va montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des partitions de $[\![1, n]\!]$ s'injecte dans $\mathfrak{S}_n$. L'application qui à une partition $A_1, \dots, A_p$ de $[\![1, k]\!]$ associe la permutation $c_1c_2\cdots c_p$ où c_i est le cycle de support A_i, est injective (grâce à l'unicité de la décomposition d'une permutation en cycles de supports disjoints). Donc $B_n = |\mathcal{P}_n| \leqslant |\mathfrak{S}_n| = n!$