NOM : PASCAL **Prénom :** Barbara **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 204 – Connexité. Exemples et applications.

Autre sujet :

I) Espaces connexes

1) Définitions, propriétés

Déf 1 : $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique est connexe si tout recouvrement de E en deux ouverts disjoints de E est $\{\emptyset, E\}$.
– $A \subset E$ est connexe si A munie de la topologie induite est connexe.

Prop 2 : Il y a équivalence entre :
1. E est connexe
2. le seul recouvrement de E en deux fermés disjoints est $\{\emptyset, E\}$
3. Les seules parties à la fois fermées et ouvertes de E sont $\emptyset$ et E.

Exemple 3 : • $F = [1,2] \cup [3,5]$ n'est pas connexe
• le singleton $E = \{a\}$ est connexe.

Corollaire 4 : Un espace topologique homéomorphe à un espace connexe est connexe.

Prop 5 : $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie connexe de E. Toute partie B vérifiant $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.

Théorème 6 : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Prop 7 : $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E telle que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Prop 8 : $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I$, $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Prop 9 : C_n une suite de parties connexes de E telle que $\forall i$, $C_{i+1} \cap C_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Exemple 10 : S^1 est connexe.

Application 11 : S^1 n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

2) Composantes connexes

Déf 12 : On dit que x et y sont connectés si et seulement si x et y appartiennent à une même partie connexe de E. On note $x \mathcal{E} y$. $\mathcal{E}$ est une relation d'équivalence.

Déf 13 : Les classes d'équivalence de $\mathcal{E}$ sont appelées composantes connexes de E.

Prop 14 : La composante connexe de $x \in E$ est la plus grande partie connexe contenant x.

Prop 15 : Les composantes connexes de E sont fermées dans E.

Exemple 16 : • Les composantes connexes de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ sont $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$
• Les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons $\{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$.

NOM : PASCAL Prénom : Barbara Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 204 - Connexité. Exemples et applications.

Autre sujet :

(204)

II) Continuité et connexité

Thm 17 : $(E,\mathcal{T}_E)$ et $(F,\mathcal{T}_F)$ des espaces topologiques avec E connexe. Si f est une application continue de E dans F, alors f(E) est connexe.

Thm 18 (des valeurs intermédiaires) f une fonction continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$, I dans $\mathbb{R}$, f(I) est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Application 19 : $f : [0,1] \to [0,1]$ continue admet un point fixe.

Prop 20 : un espace topologique E est connexe si et seulement si les seules applications continues de E dans l'espace discret $\{0,1\}$ sont les constantes.

Application 21 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$. Si l est une détermination continue du logarithme sur U alors toute autre détermination continue du logarithme sur U s'écrit $l_k = l + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Prop 22 $(E_i, \mathcal{T}_i)$ une famille d'espaces topologiques - $(\prod_{i\in I} E_i$, topologie produit) est connexe si et seulement si chacun des facteurs E_i est connexe (I finie)

Application 23 : Les pavés de $\mathbb{R}^n$ sont connexes.

• Le graphe d'une application continue de E connexe dans F est connexe.

III) Connexité par arcs et applications pratiques de la connexité

Déf 24 : $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique. Un arc est une application continue de $[0,1]$ dans E.

Déf 25 : E est connexe par arcs si $\forall (x,y) \in E \times E$ il existe un arc γ de $[0,1]$ dans E tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Exemple 26 : les courbes paramétrées définies sur un intervalle sont connexes

Prop 27 : Si E est connexe par arcs alors E est connexe.

Application 28 : • lorsque $n \geq 2$, $\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$

• S^{n-1} est connexe (sphère en dim. n)

• $B^n(0,1)$ ouverte est connexe.

Application 29 : Théorème du point-fixe de Brouwer DV1

Toute application $f : B^n(0,1) \to B^n(0,1)$ continue admet un point fixe.

Prop 30 : E connexe, F séparé. Toute application localement constante continue de E dans F est constante.

Application 31 : f holomorphe sur U un ouvert connexe. Si |f| admet un maximum en $a \in U$ alors f est constante.

NOM : PASCAL Prénom : Barbara Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 204 - Connexité. Exemples et Applications.

Autre sujet :

Exemple 32 : l'adhérence de $\{(x, \sin\frac{1}{x}), x>0\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

IV) Connexité dans les espaces métriques, les espaces vectoriels normés. Applications

1) Connexité et suites :

Prop 33 : (E,d) un espace métrique compact, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite à valeurs dans E. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} d(u_{n+1}, u_n) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est connexe.

Exemple 34 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $\mathbb{Z}$ telle que $d(u_{n+1}, u_n) \longrightarrow 0$ alors (u_n) est stationnaire (à partir d'un certain rang).

Application 35 : Méthode de Jacobi pour le calcul des valeurs propres (et vecteurs propres) d'une matrice symétrique.

2) Connexité dans les espaces vectoriels normés :

Déf 36 : E un $\mathbb{R}$-ev. Une ligne brisée de E joignant a à b est un ensemble de la forme $\bigcup_{1\leq i\leq n} [x_i, x_{i+1}]$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

Déf 37 $A \subset E$ est connexe par ligne brisée si $\forall (a,b) \in A^2$, il existe une ligne brisée dans A joignant a à b

Thm 38 E un $\mathbb{R}$-ev. normé. Un ouvert Ω de E est connexe si et seulement s'il est connexe par ligne brisée.

Application 39 : Soit U un ouvert connexe de E ($\mathbb{R}$-evn) et $f : U \to F$ ($\mathbb{R}$-evn) continue et différentiable sur U avec $df_x = 0$ $\forall x \in U$ alors f est constante.

3) Connexité de groupes matriciels - Applications.

Exemple 40 : $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) / \det A > 0\}$ est connexe par arcs.

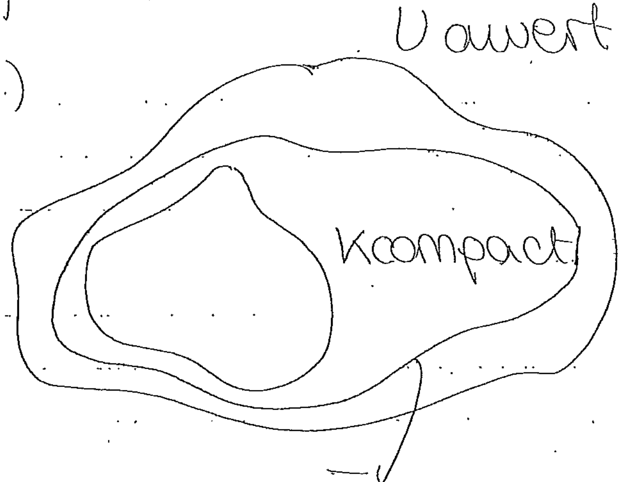
Exemple 41 : $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$ est connexe par arcs.

Exemple 42 : $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Application : $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

DV2

GONNORD, TOSEL - Calcul différentiel



- Le lemme de Milnor (énoncé)

$v : U \to \mathbb{R}^n$, C^1

Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit
$v_t : U \to \mathbb{R}^n$
$x \mapsto x + t v(x)$

Alors il existe $r > 0$ tel que
$\forall t \,/\, |t| < r$, $\quad \Omega$ ouvert, $\bar{\Omega}$ compact
v_t est un C^1 difféomorphisme de Ω sur $v_t(\Omega)$
On a alors $\displaystyle\int_K \det(dv_t(x))dx = \mu(v_t(K))$,

où μ désigne la mesure de Lebesgue,
et $\underset{\in \mathbb{R}}{t} \mapsto \displaystyle\int_K \det(dv_t(x))dx$ est polynomiale.

- Cas C^1 : montrons que si f est C^1, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| < 1$ alors f a un point fixe dans B^n

Rque : Si f admet un point fixe x, alors $x \in \overset{\circ}{B^n}$
Supposons que f n'admet pas de point fixe.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on considère la demi-droite
$\Delta_x = f(x) + \mathbb{R}_+^*(x - f(x))$. Elle coupe S^{n-1} en un unique point $r(x)$.
Résolvons $|f(x) + t(x - f(x))|^2 = 1 \quad \underline{t > 0}$
$\langle f(x) + t(x-f(x)) \,|\, f(x) + t(x - f(x)) \rangle$
$= |f(x)|^2 - 2t\langle f(x) \,|\, f(x) - x\rangle + t^2|x - f(x)|^2$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{\langle f(x)|f(x)-x\rangle + \left(\langle f(x)|f(x)-x\rangle^2 + |x-f(x)|^2(1-|f\right.}{\underbrace{|x - f(x)|^2}_{\text{ne s'annule pas par hypothèse}}}$$

est C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Par suite comme
$r(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$, r est C^1
et par définition $|r(x)| = 1$
De plus si $x \in S^{n-1}$, par définition $t(x) = 1$
donc $r(x) = x$
r est C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et $r|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$

Lemme de non rétractation :

Appliquons le lemme de Milnor à $v(x) = r(x) - x$ avec $K = B^n$, $U = \mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert contenant K, $\overline{\Omega}$ compact.
Fixons $r \in]0,1[$ tel que si $|t| < r$, v_t soit un C^1-difféomorphisme : $\Omega \to v_t(\Omega)$.
On a donc $\displaystyle\int_{B^n} \det(dv_t(x))dx = \mu(v_t(B^n))$.

<u>But</u> $v_t(B^n) = B^n$
Or $v_t(x) = x + t(r(x) - x) = (1-t)x + tr(x)$ (*)
si $x \in S^{n-1}$, $v_t(x) = x$ donc $\underline{v_t(S^{n-1}) = S^{n-1}}$

De plus, grâce à (*) on a $v_t(\mathring{B}^n) \subset \mathring{B}^n$
Or si $|t| < r$, $v_t : \Omega \to v_t(\Omega)$ est un C^1 difféo donc $v_t(\mathring{B}^n)$ est ouvert dans $\mathring{B}^n$ (thm. d'inversion locale).
De plus soit $(x_k)_{k \geq 1}$ une suite de $v_t(\mathring{B}^n)$ qui converge dans $\mathring{B}^n$ vers x.
$x_k = v_t(y_k)$, $y_k \in \mathring{B}^n$ donc $\overline{\mathring{B}^n}$ compact
$\Rightarrow \exists \varphi$ tq $y_{\varphi(k)} \xrightarrow{k} y \in B^n$

or si $y \in S^{n-1}$ alors $x = v_t(y) = y$
car $v_t|_{S^{n-1}} = Id|_{S^{n-1}}$
or $x \in \mathring{B}^n$ donc impossible
$y \in \mathring{B}^n$ et $v_t(\mathring{B}^n)$ est donc fermée dans $\mathring{B}^n$
Mais $\mathring{B}^n$ étant connexe, $v_t(\mathring{B}^n) \neq \emptyset$ on a
$v_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$.

donc $\underbrace{\displaystyle\int_{B^n} \det(dv_t(x))dx}_{\text{polynomiale donc peut s'étendre à } t \in \mathbb{R}} = \mu(B^n) \quad \forall t \in [0, r[$.

<u>En $t = 1$</u> : $dv_1 = dr$ mais $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $|r(x)|^2 = 1$
donc $\operatorname{Im} df_x \subset \underbrace{r(x)^\perp}_{\text{hyperplan car } r(x) \neq 0}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\det(dv_1(x)) = 0$
absurde car $\mu(B^n) \neq 0$
contradiction.

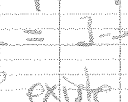
Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

I) Questions

- dev 2 : est-ce qu'on pourrait pas montrer + simplement qu'il y a une seule val ppe
  ↳ oui parce que Λ discret + dist suffisement ptes à partir d'un certain rang
- suite $\searrow$ de connexes. Intersec° connexe ?
  ↳ il faut en + un argument de compacité
  C-exple : échelle ∞ (on enlève un barreau à chaque étape)
- prop 15 Comp. connexes tjs fermées. Et ouvertes ?
  ↳ Non C-ex : ex 16 : composantes connexes de $\mathbb{Q}$ = singletons
  dém !
  ↳ $\{q\}$ connexe. On veut mq $A \subset \mathbb{Q}$, $q_1 \neq q_2 \in A \Rightarrow A$ ~~connexe~~.
  QPS $q_1 < q_2$. $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $q_1 < r < q_2$ (densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
  $O_1 =]-\infty, r[$ $O_2 =]r, \infty[$ $A \subset O_1 \cup O_2$

(thm 17) - est-ce qu'il existe une fonc° non $\mathcal{C}^0$ tq $\forall I$ int, $f(I)$ = int ?

(appli 23) - gphe d'une appli C^0 de E connexe ds F ~~connexe~~ est connexe.
Réciproque ? (gphe de E conn $\Rightarrow F$ ~~non~~ conn $\Rightarrow$ fonc° C^0 ?)
- Prop 30 Que se passe-t-il si F n'est pas séparé ?
Une appli localement cste mu non $\mathcal{C}^0$?
  ↳ localemt cte $\Rightarrow C^0$. Pas br non plus de F séparé.
- Lien entre prop 30 et appli 39 ? (sans utiliser le thm 38)
  ↳ f : $\mathcal{U}$ (ouvert connexe) $\to \mathbb{R}^n$, $df_x = 0$ $\forall x \in \mathcal{U}$
  $a, b \in \mathcal{U}$. $I = \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$.
  $\forall x, y \in I^2$, $\|f(x) - f(y)\| = 0$

 $V = \cup I = B(x, 1/n)$ alors $f_{|V}$ = cte = $f(x)$
ie localemt cte $\Rightarrow$ cte

- Prop 33 Exple qui cvge pu ? ↳ cas log n)

(II) Commentaire

- Pas bs de parler de topo gnale → se placer ds le ap métr
- Éviter les phrases trop vagues "~~La plupart de~~ "
- Écrire ce qui va être montré ds le dév !! ≠ l'énoncé !
- Les exples sont pas forcéments bien placé

Corollaire 4 : bs que de la déf

Appli 11 : bof

Exples trop simples : impression que pas connectés à ce qui précède. (exple des pavés)

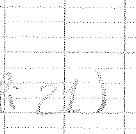
Exple 26 : support de la courbe et pas la courbe

- Dvt 2 : pas vraiment de la connexité → tiré par les cheveux (cf preuve Laurent Dumas)

De meilleurs dvts possibles.

- Détermina° du log $\mathbb{C}$ (appli 21)

Autres appli : * surjectivité de l'exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$

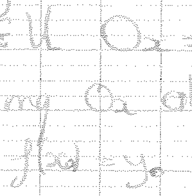
* prolongement analytique
* sous-variété  si on enlève un pt au milieu → 4 comp. conn et pas 2 ($\Rightarrow$ non homéomorphe à une dte)
* U ouvert $\subset \mathbb{R}^2$ connexe. Mq $\{\text{difféo } U \to U\} = G$ (= gpe) agit transitivement s/ U. Ie $\forall x, y \in U$, $\exists f$ difféo, $f(x) = y$

Soit $x \in U$. $O_x = \{y \in U, \exists f \in G, f(x) = y\}$

On veut mq O_x est ouvert et fermé

Ouvert : $f(x) = y_0$. On pose $f_t : x \mapsto f(x) + t(\underbrace{y - f(x)}_{y - y_0})$

y proche de y_0.

 U $\varphi : \bar{U} \to \bar{U}$ tq $\varphi|_{\bar{U} \setminus U} = 0$

→ EDO dt solu° envoie $x_0 \to y$

- Comp conn ouverte si localement connexe. Exple : variété
- Gphe connexe $\sin 1/x$ complété par 0 : gphe conn (prop5). Uls pas continue. Ds si gphe connexe par arc alors fonc° C^0

↳ sert aussi de C-ex à la réciproque du TVI.

III Exercices

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{a_i\}_{i \in I}$, I fini connexe ?

↳ oui car connexe par arc

éviter un pt : $x \overset{n}{—} y$

éviter n pts si on sait en éviter $(n-1)$ — petite boule ou

Et si I dénombrable ?

↳ $\exists$ des chemins de x à y non dénombrable