Critère de Klarès

[On trouvera des éléments de correction pour cet exercice dans le Manuy & Mneimné, *Algèbre linéaire, Réduction des endomorphismes* p.155.]

Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\mathrm{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$.

Théorème 3.1

Si u est trigonalisable, alors u est diagonalisable *si, et seulement si* $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{Ker}\,\left(\mathrm{ad}_u^2\right)$.

Comme u est trigonalisable, on dispose de sa décomposition de Dunuford $u = d + n$, avec d diagonalisable et n nilpotent qui commutent.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{Ker}\,\left(\mathrm{ad}_u^2\right)$. Alors $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}_u) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_u) = \{0\}$ (classique, voir les commentaires). Remarquons que n est un polynôme en u, donc commute avec u, *i.e.* $n \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}_u)$. De là, pour montrer que u est diagonalisable, il suffit de montrer que $n \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_u)$, *i.e.* qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $n = u \circ v - v \circ u$. Comme u est trigonalisable, χ_u est scindé : écrivons $\chi_u = \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, notons $F_\lambda \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(()\,(u - \lambda \mathrm{id}_E)^{m_\lambda})$ le sous-espace caractéristique de u associé à λ. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} F_\lambda$, et on sait, que dans la décomposition de Dunford de u, pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, sur F_λ, u induit un endomorphisme u_λ, d induit $\lambda \mathrm{id}_{F_\lambda}$ et n induit un endomorphisme nilpotent n_λ. D'après la décomposition de Jordan, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ et des entiers $1 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_\lambda$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(n_\lambda) = \mathrm{Diag}(J_{k_1}, \ldots, J_{k_\lambda})$ où J_k est le bloc de Jordan élémentaire de taille k. Pour $k \geqslant 1$, posons $M_k \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, k)$: remarquons qu'alors

$$\begin{aligned}
J_k M_k - M_k J_k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & k-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= J_k
\end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, soit v_λ l'endomorphisme de F_λ de matrice $\mathrm{Diag}(M_{k_1}, \ldots, M_{k_\lambda})$ dans $\mathcal{B}_\lambda$. D'après le calcul précédent, $n_\lambda = n_\lambda \circ v_\lambda - v_\lambda n_\lambda$, et $\lambda \mathrm{id}_{F_\lambda} \circ v_\lambda - v_\lambda \lambda \mathrm{id}_{F_\lambda} = 0$, et $u_\lambda = \lambda \mathrm{id}_{F_\lambda} + n_\lambda$, donc $n_\lambda = u_\lambda \circ v_\lambda - v_\lambda \circ u_\lambda$. En notant v l'endomorphisme de E qui induit v_λ sur chaque F_λ, on obtient $n = u \circ v - v \circ u \in I(\mathrm{ad}_u)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons u diagonalisable. Déjà, $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}_u) \subseteq \mathrm{Ker}\,\left(\mathrm{ad}_u^2\right)$. Pour $v \in \mathcal{L}(E)$, posons $G_v : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto v \circ f$ et $D_v : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ v$, de sorte que $\mathrm{ad}_u = G_u - D_u$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_u^k = G_{u^k}$, donc par linéarité, pour tout $P \in K[X]$, $P(G_u) = G_{P(u)}$. De même, $P(D_u) = D_{P(u)}$. En particulier, $\pi_u(G_u) = G_{\pi_u(u)} = G_0 = 0$, et $\pi_u(D_u) = 0$, mais u est diagonalisable donc π_u est scindé à racines simples, donc G_u et D_u sont diagonalisables. Enfin, G_u et D_u commutent, donc G_u et D_u sont codiagonalisables, donc ad_u est diagonalisable. De là, $\dim(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}_u))) = \dim(\mathrm{Ker}\,\left(\mathrm{ad}_u^2\right)))$ (dans une base de diagonalisation, la dimension du noyau est le nombre de zéros sur la diagonale, donc dans une base de codiagonalisation, le nombre de zéros sur la diagonale de ad_u est le même que celui de ad_u^2), d'où $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{Ker}\,\left(\mathrm{ad}_u^2\right)$.

- Recasages : 148 (Exemples de décompositions de matrices. Applications.), 154 (Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.), 155 (Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.), 157 (Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.)
- Proposition : $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}\left(u^2\right) \iff \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. Si $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$, alors pour tout $y = u(x) \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u),\ 0 = u(y) = u^2(x)$ donc $x \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u)$, donc $y = 0$. Réciproquement, on a toujours $\operatorname{Ker}(u) \subseteq \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$, et pour tout $x \in \operatorname{Ker}\left(u^2\right),\ 0 = u(u(x))$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$, donc $x \in \operatorname{Ker}(u)$.
- Rappel : u diagonalisable $\iff \pi_u$ est scindé à racines simples $\iff$ il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.
- Rappel : pour prouver le théorème de codiagonalisation d'une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, on procède par récurrence sur la dimension de l'espace. Si la famille est une famille d'homothéties, alors il n'y a rien à faire, sinon on prend un endomorphisme qui n'est pas un homothétie et on décompose l'espace en somme de sous-espaces propres de cet endomorphisme. Chaque endomorphisme de la famille induit un endomorphisme sur les sous-espaces propres en question, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.
- Contre-exemple : une rotation de $\mathbb{R}^2$ distincte de l'identité n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, pourtant elle l'est sur $\mathbb{C}$, donc *a fortiori* vérifie l'identité des noyaux. L'hypothèse de trigonalisabilité est donc capitale.
- On trouvera une preuve alternative *via* la forme trace dans le *Carnet de voyage en Algébrie* de Caldero et Germoni (p.93).
- À quoi sert le critère de Klarès : ce n'est pas un critère utile dans la pratique, et surtout informatiquement, puisque de complexité de l'ordre de n^6. J'ai entendu dire que ça pouvait servir pour les algèbres de Lie... en attendant, ça fait une très belle application des décompositions classiques !
- Si $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K et si $u^{(K)}$ désigne u vu comme endomorphisme du $\overline{K}$-espace vectoriel K, alors on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
u \text{ diag} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & \mathrm{ad}_u \text{ diag} \arrow[d, Rightarrow, shift left] \\
u^{(K)} \text{ diag} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[u, Rightarrow, bend right, shift right] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \arrow[ur, phantom, "(\text{si } \pi_u \text{ scindé})"] & \begin{array}{c}\operatorname{Ker}(\mathrm{ad}_u) \\ =\operatorname{Ker}\left(\mathrm{ad}_u^2\right)\end{array} \arrow[u, Rightarrow, bend left, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift left] \\
u \text{ semi-simple} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[u, Rightarrow, bend right, shift right] \arrow[ur, phantom, "(\text{si } \pi_u \text{ séparable})"] & \mathrm{ad}_u \text{ semi-simple} \arrow[u, Rightarrow, bend left, shift left]
\end{tikzcd}$$

Figure 3.1 – Critère de Klarès et semi-simplicité