Équations de Lotka-Volterra

Leçons : 229, 267.

Énoncé : On étudie le système $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$ de condition initiale $\begin{cases} x(0) = x_0 > 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$, où x et y modélisent les effectifs des proies et prédateurs dans un écosystème avec : $a>0$ le taux de reproduction des proies, $b>0$ le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs, $c>0$ le taux de mortalité des prédateurs, $d>0$ le taux de reproduction des prédateurs dû à la consommation de proies.

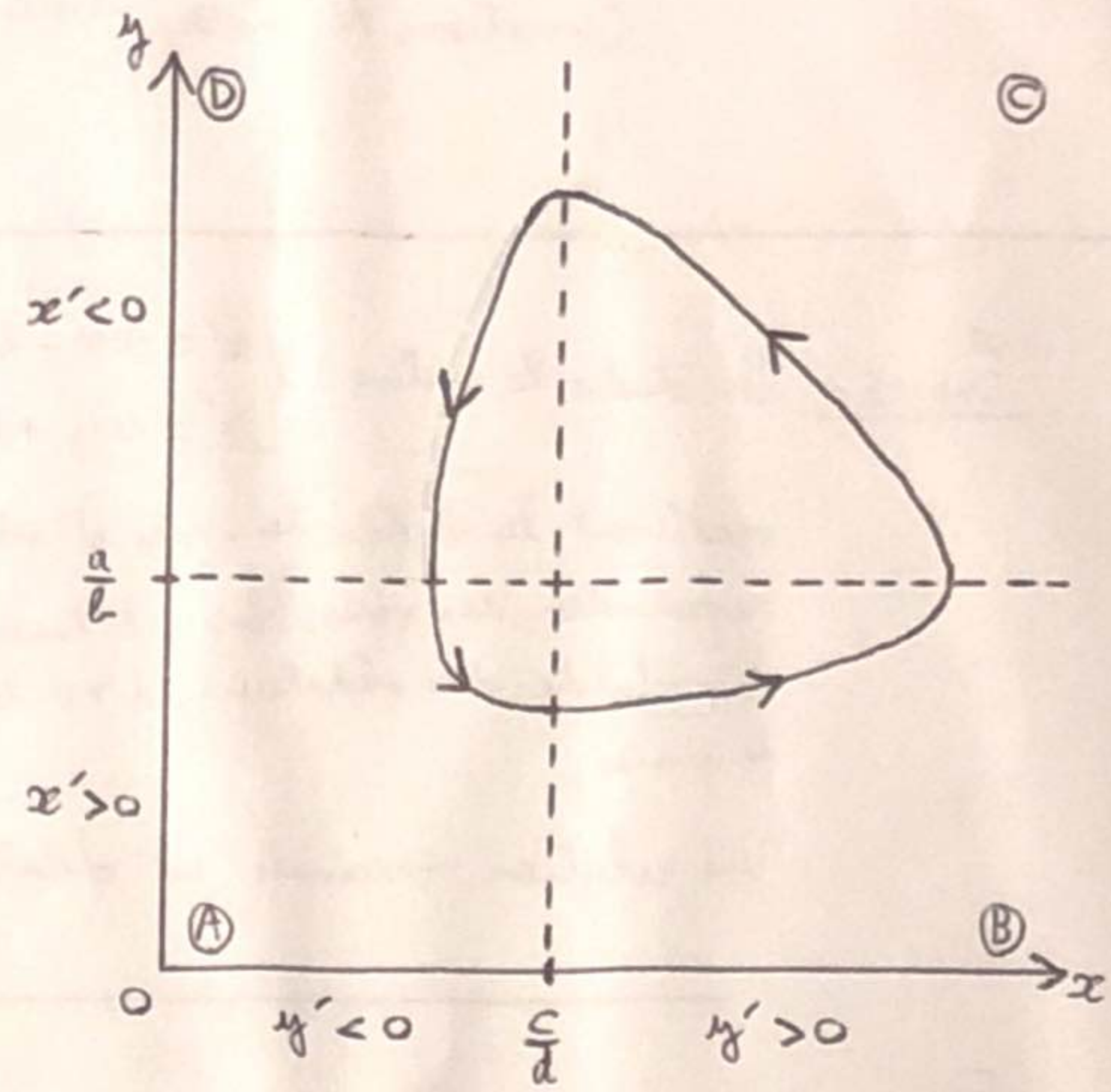
Une solution maximale est globale et périodique.

Preuve.

- On note $F : (x,y) \mapsto (ax - bxy, -cy+dxy)$ le champ associé au système, qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Le th de Cauchy-Lipschitz s'applique : il existe une unique solution maximale (x,y), définie sur un intervalle ouvert I. On va mq $I = \mathbb{R}$.
D'abord si il existe $t_1 \in I$ tq $x(t_1) = 0$, la solution $(0, t \mapsto y(t_1)e^{-c(t-t_1)})$ du système coïncide avec (x,y) au temps t_1. Par unicité, x est nulle : c'est absurde puisque $x(0) = x_0 > 0$.
Donc x ne s'annule pas. De même pour y, la solution est à valeurs dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On déf alors $H : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto dx - c\ln x + by - a\ln y \end{cases}$: on va mq il s'agit d'une intégrale première. Ceci équivaut à $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $D_{(x,y)}H(F(x,y)) = 0$. Calculons : $H(x+h_1, y+h_2)$
$= d(x+h_1) - c\left(\ln x + \frac{h_1}{x} + o(h_1)\right) + b(y+h_2) - a\left(\ln y + \frac{h_2}{y} + o(h_2)\right) = H(x,y) + \left(d - \frac{c}{x}\right)h_1 + \left(b - \frac{a}{y}\right)h_2 + o(h_1,h_2)$
donc $D_{(x,y)}H(h_1,h_2) = \left(d - \frac{c}{x}\right)h_1 + \left(b - \frac{a}{y}\right)h_2$. On a $D_{(x,y)}H(F(x,y)) = \left(d-\frac{c}{x}\right)(ax - bxy) + \left(b - \frac{a}{y}\right)(-cy + dxy)$
$= \cdots = 0$: c'est ce que l'on voulait.
On pose enfin $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto dx - c\ln x \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ y \mapsto by - a\ln y \end{cases}$: $H(x,y) = f(x) + g(y)$ pour tous $x,y>0$.
$f'(x) = d - \frac{c}{x}$ donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{c}{d}$: f admet un minimum global en $\frac{c}{d}$. De même pour g en $\frac{a}{b}$.
Puisque H est une intégrale première, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f(x(t)) + g(y(t)) = \lambda$ pour tout $t \in I$: en particulier $f\left(\frac{c}{d}\right) \leq f(x(t)) \leq \lambda - g\left(\frac{a}{b}\right)$ pour tout $t \in I$. Or $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$: ceci impose x bornée.
De même pour y ; d'après le th des bouts, la solution est globale : $I = \mathbb{R}$.

- Montrons ensuite que les orbites sont périodiques. Regardons pour commencer les points d'équilibre : si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$,
$F(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b\beta)\alpha = 0 \\ (-c + d\alpha)\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \beta = a/b \\ \alpha = c/d \text{ ou } \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha = c/d \\ \beta = a/b \end{cases}$. On trouve $(0,0)$ et $(c/d, a/b)$, le second étant dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On partage $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (ou plutôt $(\mathbb{R}_+^* \setminus \{c/d\}) \times (\mathbb{R}_+^* \setminus \{a/b\})$) en quatre zones A, B, C, D selon les signes de $x - c/d$ et $y - a/b$ (et donc selon les signes de y' et x') (voir dessin). On va mq en partant de la zone A on passe forcément dans la zone B : on suppose $\begin{cases} x_0 < c/d \\ y_0 < a/b \end{cases}$, et on suppose par l'absurde que pour tout $t > 0$, $\begin{cases} x(t) < c/d \\ y(t) < a/b \end{cases}$. Dans cette zone on a $\begin{cases} x'(t) > 0 \\ y'(t) < 0 \end{cases}$

donc x est ↗ et y est ↘ ; or on a vu que les deux étaient bornées. Cela implique que $(x(t), y(t))$ converge qd $t \to \infty$. La limite est, par continuité, un point d'équilibre dans l'adhérence de la zone A : $[0; c/d] \times [0; a/b]$. C'est donc $(0,0)$ ou $(c/d, a/b)$. Mais x ↗ et $x_0 > 0$ donc ça ne peut être le premier ; et y ↘ et $y_0 < a/b$ donc ça ne peut être le second : c'est absurde ! Donc il existe $t_1 > 0$ tq $x(t_1) \geq c/d$ ou $y(t_1) \geq a/b$.
y ↘ et $y_0 < a/b$ donc on a $\begin{cases} x(t_1) \geq c/d \\ y(t_1) < a/b \end{cases}$.



Si $x(t_1) > c/d$ on est dans la zone B. Sinon $x(t_1) = c/d$ avec $x'(t_1) > 0$ donc au voisinage à droite de t_1 on est dans la zone B.

On montre de même que l'on passe de B à C, de C à D, de D à A (en utilisant tjrs que x et y sont bornées, même si ce n'est pas sur le dessin).

Reste à prouver la périodicité. Ce qui précède impose (par le TVI) que l'on "coupe à chaque tour" la demi-droite $\{(c/d, y) ; y > a/b\}$, autrement dit il existe $0 < t_1 < t_2$ tq $x(t_1) = x(t_2) = c/d$, $y(t_1) > a/b$, $y(t_2) > a/b$. Mais $H(c/d, \cdot) = f(c/d) + g$ est strictement croissante sur $]a/b; \infty[$ donc injective : puisque $H(c/d, y(t_1)) = H(c/d, y(t_2))$, $y(t_1) = y(t_2)$. On repasse par le même point.
En posant $T = t_2 - t_1$, $t \mapsto (x(t+T), y(t+T))$ est encore solution du système pour la condition initiale $(x(t_1), y(t_1))$ car le système est autonome. Par unicité de Cauchy-Lipschitz il y a égalité, et finalement (x, y) est T-périodique. $\square$

Complément : les valeurs moyennes de x et y sont $\frac{1}{T}\int_0^T x = c/d$ et $\frac{1}{T}\int_0^T y = a/b$.

Preuve. On montre pour x (c'est pareil pour y). On écrit, puisque $y' = -cy + dxy$, $x = \frac{y' + cy}{dy} = \frac{1}{d}\frac{y'}{y} + \frac{c}{d}$.
Mais $\int_0^T \frac{y'}{y} = [\ln(y(t))]_{t=0}^{t=T} = 0$ par T-périodicité. On en déduit $\frac{1}{T}\int_0^T x = c/d$ par linéarité. $\square$

Réf : FGN - Analyse 4 : p 250.

↳ Modèle conçu indépendamment par Lotka et Volterra au début du XX^e siècle pour représenter l'évolution des populations de proies et prédateurs (les proies ont une source de nourriture illimitée donc une croissance exponentielle en l'absence de prédateurs, les prédateurs meurent sans se reproduire en l'absence de proies et ont alors une décroissance exponentielle).

↳ On utilise que H est une intégrale première ssi $D_X H(F(X)) = 0$ pour tout X. En effet $(H \circ X)'(t) = D_t(H \circ X)(t)$
$= (D_{X(t)} H \circ D_t X)(t) = D_{X(t)} H(X'(t)) = D_{X(t)} H(F(X(t)))$.