NOM : LEROUVILLOIS Prénom : Vincent Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : leçon 181, Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications

Autre sujet :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E, de dimension finie d. $\mathcal{E}$ est naturellement muni d'une topologie induite par la topologie de E.

I - Barycentres et coordonnées barycentriques

1) Barycentres

Def 1 : Un système de points pondérés $(A_1,\alpha_1)\dots(A_n,\alpha_n)$ est la donnée de n points de $\mathcal{E}$ et de n réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$.

Prop/Def 2 : Soit $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$ un système de points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$. Alors il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$ appelé le barycentre de $(A_1,\alpha_1)\dots(A_n,\alpha_n)$ et noté

$$G = Bar((A_1,\alpha_1),\dots(A_n,\alpha_n))$$

Exemple 3 : Soient A,B deux points distincts de $\mathcal{E}$.

$$(AB) = \{ Bar((A,\alpha),(B,1-\alpha)) / \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Thm 4 : (Homogénéité) Soit $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$. et $\lambda\in\mathbb{R}^*$. alors $Bar((A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}) = Bar((A_i,\lambda\alpha_i)_{1\leq i\leq n})$

Thm 5 : (Associativité) Soient $(A_{ij},\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n_i}}$ avec $\forall i\ \sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\neq 0$ et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\neq 0$.

Alors $Bar((A_{ij},\alpha_{ij})_{i,j}) = Bar((G_i,\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}))$

où $G_i = Bar((A_{ij},\alpha_{ij})_{1\leq j\leq n_i})$

Def 6 : On appelle isobarycentre de $A_1\dots A_n$ le barycentre des $(A_i,1)_{1\leq i\leq n}$

Application 7 : Les médianes d'un triangle sont concourantes en le centre de gravité qui est situé à $\frac{1}{3}$ de la base de chaque médiane

Application 8 : L'isobarycentre d'un parallélogramme est aussi le milieu de chacune de ses diagonales

2) Lien avec les sous-espaces affines et les applications affines

Prop 9 : $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est stable par barycentre.

Coro 10 : Le sous-espace affine engendré par une partie $A\subseteq\mathcal{E}$, noté $Aff\langle A\rangle$ est l'ensemble des barycentres de points de A.

Exemple 11 :
- $Aff\langle\{A,B\}\rangle = (AB)$ si $A\neq B$
- $Aff\langle\{A,B,C\}\rangle$ est le plan passant par A,B,C si ces points ne sont pas alignés.

Prop 12 : Une application $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}'$ entre espaces affines est affine si et seulement si pour tout système de points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ $f(Bar(A_i,\alpha_i)) = Bar(f(A_i),\alpha_i)$

3) Repérage et coordonnées barycentriques

Def 13 : $(A_0,\dots,A_d)$ est un repère affine si et seulement si $(\overrightarrow{A_0A_1},\dots,\overrightarrow{A_0A_d})$ est une base de E.

Exemple 14 : Dans un plan affine, un triangle non aplati est un repère affine

Prop 15 : Soit $R=(A_0,\dots,A_d)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Pour tout $M\in\mathcal{E}$, il existe un unique $(d+1)$-uplets de réels $\alpha_0,\dots,\alpha_d$ tels que $\sum_{i=0}^{d}\alpha_i=1$ et $M = Bar((A_i,\alpha_i)_{0\leq i\leq d})$ appelé les coordonnées barycentriques de M dans le repère R.

Exemple 16 : Soit A,B,D,C un parallélogramme d'un plan affine. A,B,C est un repère affine et $A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$ $D(-1,1,1)$ et $G(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sont les coordonnées barycentriques où G est l'isobarycentre.

Prop 17 : (Interprétation en terme de volume). Les coordonnées barycentriques d'un point $M(x,y,z)$ dans un repère affine A,B,C sont données par

$$x = \frac{|\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}|}{|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}|},\quad y = \frac{|\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}|}\quad z = \frac{|\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}|}$$

, déterminants pris dans une base quelconque.

4) Equations barycentriques

Prop 18 : Soit $A_0, \dots, A_k$ une famille de points affinements libres ayant pour coordonnées barycentriques $(a_{ij})_{\substack{0 \le i \le d \\ 0 \le j \le k}}$ dans un repère affine R.

alors $M \in \mathrm{Aff}(\{A_0, \dots, A_k\}) \iff \begin{pmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,k} & x_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{d,0} & \cdots & a_{d,k} & x_d \end{pmatrix}$ est de rang $k+1$

Coro 19 : L'équation barycentrique d'un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$ est de la forme :
$a_0 x_0 + \dots + a_d x_d = 0$ où $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ non tous égaux.

Exemple 20 : Dans un repère affine du plan affine, A, B et C sont alignés ssi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

DEV1

Lemme 21 : Trois droites D, D' et D'' d'un plan affine d'équations barycentriques dans un repère affine $ax+by+cz=0$, $a'x+b'y+c'z=0$ et $a''x+b''y+c''z=0$ sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$

Application 22 : (Théorème de Menelaüs) Soit A, B, C un triangle non aplati. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ distincts des sommets. Alors A', B' et C' sont alignés ssi $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

Application 23 : (Théorème de Céva) Avec le même énoncé, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

II - Convexité et enveloppe convexe

1) Parties convexes

Def 24 : Soit $A \subseteq \mathcal{E}$. Une combinaison convexe de A est un barycentre de points $(A_1, \lambda_1) \dots (A_n, \lambda_n)$ de A avec $\lambda_i \ge 0$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

Exemple 25 : Si $A, B \in \mathcal{E}$, $[AB]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $\{A, B\}$

Def 26 : Une partie C de $\mathcal{E}$ est convexe si $\forall A, B \in C$, $[AB] \subseteq C$

Prop 27 : C est convexe ssi C est stable par combinaison convexe.

Exemple 28 : - Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- les sous-espaces affines sont convexes
- les boules de $\mathcal{E}$ sont convexes (La boule unité de $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ est un cube, la boule unité de son dual est un tétraèdre régulier).
- Les demi-espaces fermés et les demi-espaces ouverts sont convexes.

Prop 29 : Si C est convexe, alors $\bar{C}$ et $\mathring{C}$ sont aussi convexes.

Exercice 30 : Si C est fermé et si C est stable par milieu, alors C est convexe. Montrons que cela n'est pas forcément vrai si C n'est pas fermé.

Prop 31 : Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine, C est un convexe de $\mathcal{E}$ et C' est un convexe de $\mathcal{E}'$, alors $f(C)$ et $f^{-1}(C')$ sont convexes.

Prop 32 : Une partie convexe de $\mathcal{E}$ est connexe par arcs.

Rq 33 : L'image d'un convexe par une application continue n'est pas forcément convexe.

2) Enveloppe convexe

Prop 34 : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes. Alors $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

Def 35 : L'enveloppe convexe de $A \subseteq \mathcal{E}$, notée $C_v(A)$ est l'intersection des convexes de $\mathcal{E}$ contenant A. C'est le plus petit convexe contenant A.

Prop 36 : $C_v(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A.

Exemple 37 : L'enveloppe convexe de deux points distincts est un segment. L'enveloppe convexe de trois points non ~~coplanaires~~ alignés est un triangle.

Théorème 38 : (de Lucas) Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Def 39 : On appelle simplexe plein l'enveloppe convexe d'un repère affine de $\mathcal{E}$.

Thm 40 : (Carathéodory) Soit A une partie de $\mathcal{E}$. Tout élément de $C_v(A)$ s'écrit comme une combinaison convexe d'au plus $\dim(\mathcal{E})+1$ points de A.

Corollaire 41 : L'enveloppe convexe d'un compact est encore compacte.

Contre-exemple 42 : Si A est seulement fermé, $C_v(A)$ n'est pas forcément fermé. $\mathcal{E}=\mathbb{R}^2$, $A=\mathbb{R}\times\{0\}\cup(0,1)$, $C_v(A)=\mathbb{R}\times[0,1[\,\cup(0,1)$ n'est pas fermé.

Prop 43 : Tout compact est l'enveloppe convexe de sa frontière

Exemple 44 : $C_v(\mathcal{S}_d(0,1))=\mathcal{B}_d(0,1)$

III - Résultats sur les convexes et applications

1) Résultats de séparation

Thm 45 : (Projection sur un convexe fermé). Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et C un convexe fermé non vide et A un point n'appartenant pas à C.
Il existe un unique point P, projeté de A sur C vérifiant $AP=d(A,C)$
L'hyperplan contenant P et orthogonal à $\overrightarrow{PA}$ est un hyperplan d'appui de C qui sépare A de C.

Thm 46 (de Hahn-Banach) : Soit C un convexe fermé et K un convexe compact tels que $C\cap K=\emptyset$. Il existe un hyperplan affine séparant strictement C et K.

DEV 2 **Application 47 :** L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $|||\cdot|||_2$.

Prop 48 : Un convexe fermé de $\mathcal{E}$ est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant. C'est aussi l'intersection des demi-espaces fermés le contenant et qui sont déterminés par des hyperplans d'appui.

2) Points extrémaux.

Def 49 : Soit C un convexe de $\mathcal{E}$. Un point M de C est extrémal si M n'est pas le milieu de deux points distincts de C. On note $Extr(C)$ l'ensemble des points extrémaux

Prop 50 : $M\in C$ est extrémal ssi $\forall A,B\in C$ $A\neq M$ et $B\neq M$ $M\notin[A,B]$ ssi M n'est pas combinaison convexe de points de C distincts de M ssi $C\setminus\{M\}$ est convexe

Thm 51 (Krein-Milman) Pour tout convexe compact non vide K de $\mathcal{E}$, on a $K=C_v(Extr\,K)$.

Exemple 52 : Les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $|||\cdot|||_2$ sont exactement les matrices orthogonales.

Application 53 : Autre démonstration du fait que $C_v(O_n(\mathbb{R}))=\mathcal{B}_{|||\cdot|||_2}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

Exemple 54 : Dans l'ensemble des matrices stochastiques, les matrices ne contenant que des 0 et des 1 sont les points extrémaux.

3) Polyèdres convexes

Def 55 : Un polyèdre convexe est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non coplanaires d'un espace affine de dimension 3.

Rq 56 : Un polyèdre convexe est compact et d'intérieur non vide. Ses points extrémaux sont les sommets du polyèdre.

Prop 57 (Euler) les nombres s,a,f de sommets, d'arêtes, de faces vérifient $s-a+f=2$

Coro 58 : Les cinq solides platoniciens sont les seuls polyèdres convexes réguliers.

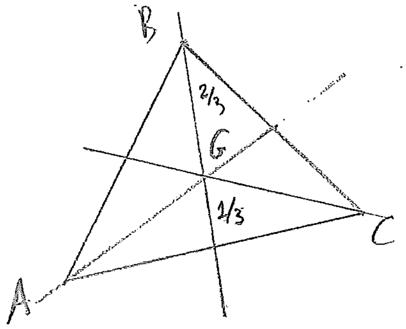
4) Fonctions convexes

Def 59 : Soit C un convexe. Une fonction $f: C\to\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si
$$\forall M,N\in C^2,\ \forall t\in[0,1]\quad f(tM+(1-t)N)\leq tf(M)+(1-t)f(N)$$

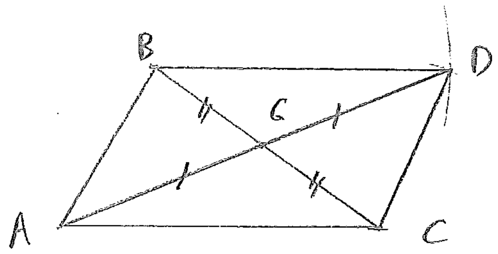
Prop 60 : (Jensen) Si f est convexe, alors $\forall A_1,\dots,A_n\in C$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n\geq 0 \,/\, \sum_{i=1}^n\lambda_i=1$
alors $f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_iA_i\right)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(A_i)$

Appli 61 : (Inégalité arithmético géométrique) $\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$ $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}\leq\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{n}$

Annexe:

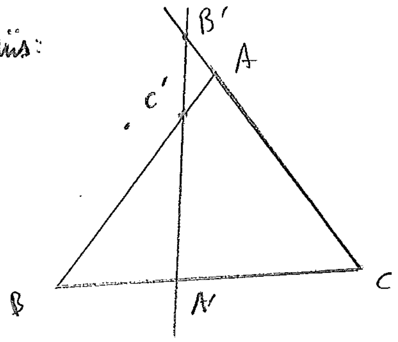


Les médianes d'un triangle sont concourantes



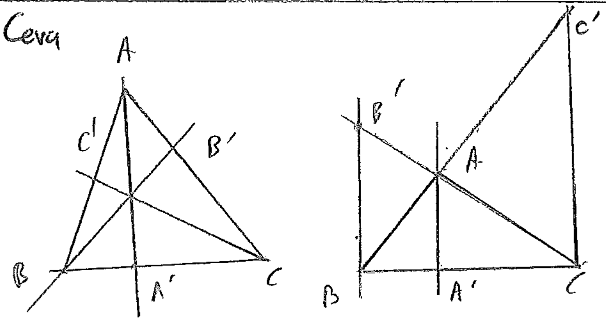
L'isobarycentre du parallélogramme est le milieu des diagonales du parallélogramme.

Menelaüs:



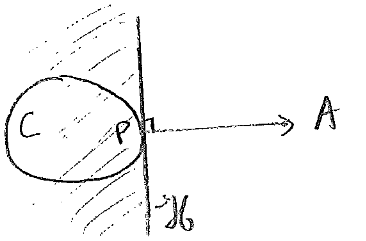
A', B', C' alignés $\Longleftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

Ceva

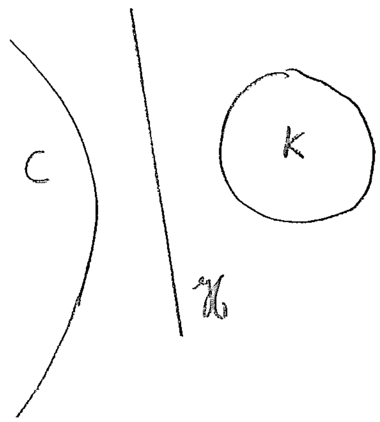


$(AA'), (BB'), (CC')$ concourantes ou parallèles $\Longleftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

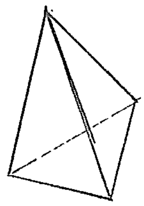
Projection sur un convexe fermé



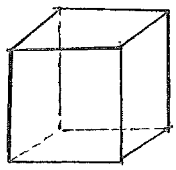
Théorème de Hahn Banach



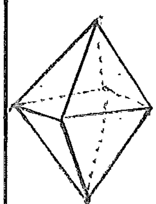
Solides de Platon: - (m,n) m est le nombre d'arêtes par face.
- n est le nombre d'arêtes issues de chaque sommet.



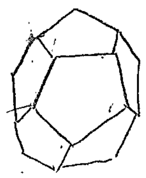
tétraèdre $(3,3)$



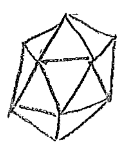
cube $(4,3)$



octaèdre $(3,4)$



dodéaèdre $(5,3)$



icosaèdre $(3,5)$

- $O_n(\mathbb{R})$ et compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc d'après les lemmes ① et ②, il suffit de montrer que

$$\forall\ M \in \mathcal{B} \text{ et } \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad Tr(AM) \leq \sup_{P \in O_n(\mathbb{R})} Tr(AP)$$

. Par décomposition polaire, il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega S$

Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthonormée de vecteurs propres de S.

On a alors $Tr(AM) = Tr(MA) = \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i | e_i \rangle$ (car $(e_i)_i$ est une base orthonormée)

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i | {}^tM e_i \rangle$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \|{}^tM e_i\|_2$

Or $\|{}^tMe_i\|_2 = \|Me_i\|_2 \leq 1$ car $M \in \mathcal{B}$

et $\|Ae_i\|_2 = \|\Omega S e_i\|_2 = \|Se_i\|_2$ car $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$

D'où $\underline{Tr(AM) \leq \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2 = Tr(S)}$

Par ailleurs, $\sup_{P \in O_n(\mathbb{R})} Tr(AP) \geqslant Tr(A\Omega^{-1}) = Tr(\Omega^{-1}A) = Tr(S)$

Donc $\forall M \in \mathcal{B}\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad Tr(AM) \leq \sup_{P \in O_n(\mathbb{R})} Tr(AP)$.

Par les lemmes ① et ②, on obtient que $\underline{\mathcal{B} \subseteq C_r(O_n(\mathbb{R}))}$ □

DEV 2 : Enveloppe convexe du groupe orthogonal

Théorème : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $|||\ |||_2$ et que l'on note $\mathcal{B}$.

– $C_v(O_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{B}$

En effet, $O_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}$ car $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $|||M|||_2 = 1$ et $\mathcal{B}$ est une boule donc est convexe donc $C_v(O_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{B}$.

– Montrons l'inclusion réciproque $\mathcal{B} \subseteq C_v(O_n(\mathbb{R}))$

Lemme 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et K un compact de E. Soit $x \in E$. Si $\forall \varphi \in E'$ on a $\varphi(x) \leq \sup_{y\in K} \varphi(y)$, alors $x \in C_v(K)$.

preuve : Par contraposée, si $x \in E \setminus C_v(K)$.
Comme K est compact, par le corollaire du théorème de Carathéodory, $C_v(K)$ est également compact.
Par le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan affine H séparant strictement le convexe compact $\{x\}$ du convexe compact $C_v(K)$. Donc il existe une forme linéaire $\varphi \in E'$ telle que $H = \varphi^{-1}(\{c\})$ pour $c \in \mathbb{R}$. et $\forall y \in C_v(K)$ $\varphi(y) < c < \varphi(x)$

D'où
$$\sup_{y\in K} \varphi(y) \leq c < \varphi(x).$$
□

Déterminons $M_n(\mathbb{R})'$, le dual de $M_n(\mathbb{R})$.

Lemme 2 : Le dual de $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des applications de la forme $M \mapsto Tr(AM)$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$

preuve : Définissons $\phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})' \\ A \longmapsto (M \mapsto Tr(MA)) \end{cases}$

- ϕ est linéaire. Par le théorème du rang, ϕ est bijective ssi ϕ est injective.
- Supposons $A \in \ker \phi$. Alors $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $Tr(AM) = 0$.

Pour $M = {}^tA$ $\quad Tr(A{}^tA) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$ donc $a_{ij} = 0$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ d'où $A = 0$

Par conséquent, ϕ est injective donc bijective

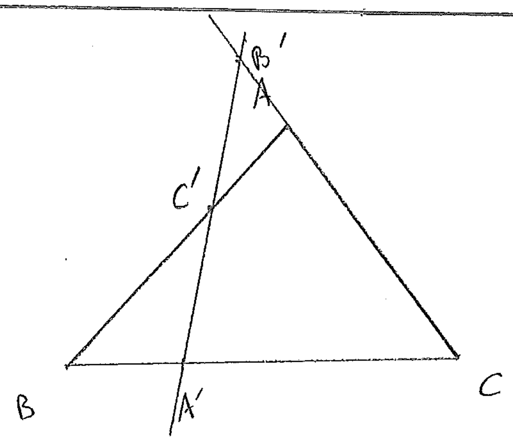
□

DEV1 : Théorèmes de Menelaüs et de Ceva

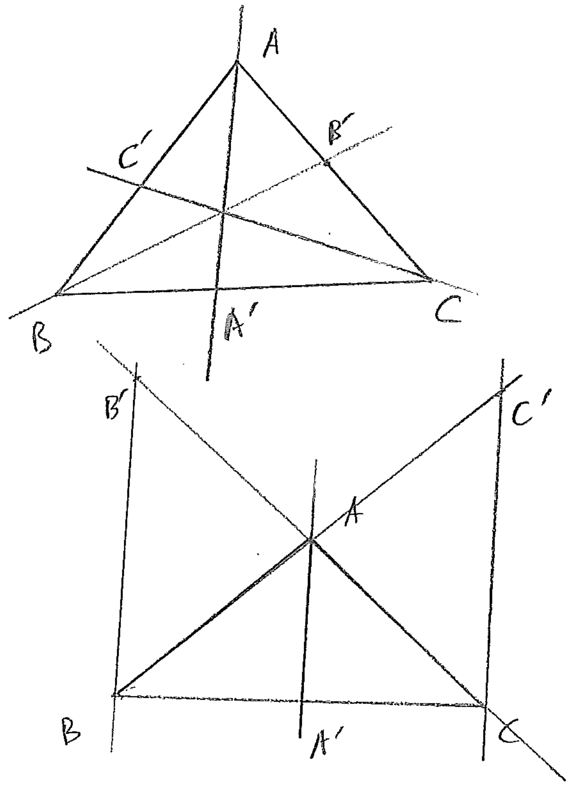
Théorème : i) Menelaüs : Soit A, B, C un triangle non aplati. Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ distincts des sommets. Alors A', B', C' sont alignés ssi $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

ii) Ceva : Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

i)



ii)



preuve : plaçons-nous dans le repère barycentrique défini par le triangle ABC.
Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point M dans ce repère.

$A' \in (BC) \setminus \{B, C\}$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ / $A' = Bar((B, \alpha), (C, 1-\alpha))$

Donc $\alpha \overrightarrow{A'B} + (1-\alpha) \overrightarrow{A'C} = 0$ D'où $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}$

et A' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$ dans le repère A, B, C.

De même, $\exists \beta$ et $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ / $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$, $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{(1-\gamma)}{\gamma}$

et $B' \begin{pmatrix} 1-\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, $C' \begin{pmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère ABC.

Or d'après le ~~lemme~~ exemple 20 du plan, A', B', C' sont alignés ssi $\begin{vmatrix} 0 & 1-\beta & \gamma \\ \alpha & 0 & 1-\gamma \\ 1-\alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = 0$

ssi $\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma} = -1$

ssi $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

Ce qui prouve le théorème de Ménélaüs.

Pour le théorème de Ceva, écrivons l'équation de la droite (AA'), de (BB') et de (CC')

. $M \in (AA')$ ssi A, A', M alignés ssi $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \alpha & y \\ 0 & 1-\alpha & z \end{vmatrix} = 0$ ssi $-(1-\alpha)y + \alpha z = 0$

. $M \in (BB')$ ssi B, B', M alignés ssi $\begin{vmatrix} 0 & 1-\beta & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & \beta & z \end{vmatrix} = 0$ ssi $\beta x - (1-\beta) z = 0$

. $M \in (CC')$ ssi C, C', M alignés ssi $\begin{vmatrix} 0 & \gamma & x \\ 0 & 1-\gamma & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$ ssi $-(1-\gamma)x + \gamma y = 0$

Lemme : Trois droites D, D', D'' d'un plan affine d'équations barycentriques dans un repère affine $ax+by+cz=0$, $a'x+b'y+c'z=0$, $a''x+b''y+c''z=0$ sont concourantes ou parallèles ssi :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Donc (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} 0 & \beta & -(1-\gamma) \\ -(1-\alpha) & 0 & \gamma \\ \alpha & -(1-\beta) & 0 \end{vmatrix} = 0$

ssi $-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + \alpha\beta\gamma = 0$

ssi $\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma} = 1$

ssi $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$

preuve du lemme :

Si D est d'équation $f(x,y,z) = ax+by+cz=0$
D' // $g(x,y,z) = a'x+b'y+c'z=0$
D'' // $h(x,y,z) = a''x+b''y+c''z=0$

$\boxed{\text{Si } \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0}$ alors on a par exemple un couple $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ /
$h = \lambda f + \mu g$.

- Si D et D' sont sécantes en $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$, $h(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega) = \lambda f(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega) + \mu g(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$
donc $\Omega \in D''$ et les 3 droites sont concourantes

- Si $D \parallel D'$, comme D est de direction $\left\langle \begin{pmatrix} a-c \\ b-c \end{pmatrix} \right\rangle$ et D' de direction $\left\langle \begin{pmatrix} a'-c' \\ b'-c' \end{pmatrix} \right\rangle$

$D \parallel D' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-c & a'-c' \\ b-c & b'-c' \end{vmatrix} = 0$ mais alors $\begin{vmatrix} a-c & \lambda(a-c)+\mu(a'-c') \\ b-c & \lambda(b-c)+\mu(b'-c') \end{vmatrix} = 0$ donc $D \parallel D''$

- Pour le sens réciproque, si les 3 droites sont confondues, c'est trivial.

Sinon, on peut supposer $D \neq D'$.

- Si D, D', D'' sont concourantes en Ω. Soit $M(x_0,y_0,z_0) \in D'' \setminus \{\Omega\}$.

on pose $\lambda = g(x_0,y_0,z_0)$ et $\mu = -f(x_0,y_0,z_0)$. on pose $\tilde{h} = \lambda f + \mu g$.

Par construction, $\tilde{h}(x_0,y_0,z_0) = 0$ et $\tilde{h}(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega) = 0$ donc $D'' = (\Omega M) \subseteq \tilde{h}^{-1}(\{0\})$

et $\tilde{h}$ est bien l'équation d'une droite car est de la forme $a''x+b''y+c''z=0$ avec a'',b'',c'' non tous égaux
car si $\mu \neq 0$ par exemple $((\lambda,\mu)\neq(0,0))$ et $N \in D \setminus D'$ alors $f(x_N,y_N,z_N) = 0$ mais $h(x_N,y_N,z_N) \neq 0$ donc $N \notin \tilde{h}^{-1}$

donc $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$

- Si $D \parallel D' \parallel D''$, Soit $M(x_0,y_0,z_0) \in D''$. On pose $\lambda = g(x_0,y_0,z_0)$ et $\mu = -f(x_0,y_0,z_0)$

$M \in \tilde{h}^{-1}(\{0\})$ et la direction de $\tilde{h}$ est $\left\langle \begin{pmatrix} \lambda(a-c)+\mu(a'-c') \\ \lambda(b-c)+\mu(b'-c') \end{pmatrix} \right\rangle$ $\tilde{h} = \lambda f + \mu g$
qui est colinéaire en la direction de D et D'

donc $D'' \subseteq \tilde{h}^{-1}(\{0\})$.

de même, $\tilde{h}$ est bien l'équation d'une droite en coordonnées barycentriques

donc $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$

Leçon 181. Barycentre dans un ep affine réel de dim finie, Convexité. Applications

I Questions - développement

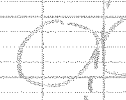
- Thm 16. Énoncé plus précis ?

→ $H = \varphi^{-1}(c)$ o $\varphi \in E'$

$C \subset \{x \mid \varphi(x) < c\}$

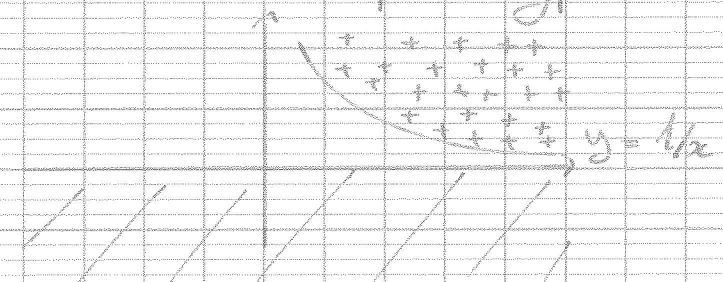
$K \subset \{x \mid \varphi(x) > c\}$

Autres énoncés ?

→ Si ils sont ouverts, ok mais pas strictement 

C-ex ds le cas où on n'a plus l'hypothèse compacte ?

→



- Décomposition polaire. Preuve ?

→ Par unicité

Preuve : d'abord cas $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$,

$S = \sqrt{{}^tAA}$ $U = AS^{-1}$

Puis densité des matrices inversibles

- Pourquoi $O_n(\mathbb{R})$ compact ?

→ $f : M \mapsto {}^tMM$ $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ fermé borné.

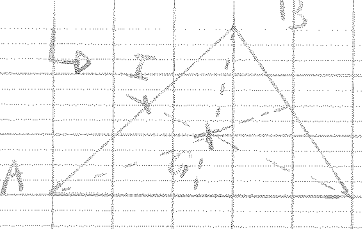
II Questions - plan

- Topologie induite de E sur $\mathcal{E}$?

→ $B(A,r) = \{B \mid \|\vec{AB}\| < r\}$

- Ep normés → boules convexes. C-ex ?

- Appli 7. Preuve ?



$\hookrightarrow$

$G = Bar((A,1),(B,1),(C,1))$

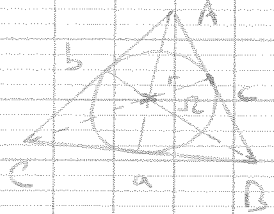
$I = Bar((A,1),(B,1))$

Par asso. $G = Bar((I,2),(C,1))$

$\Rightarrow G \in (IC)$

Exercice : donner les coord. bary. des pts remarquables du triangle

- Médianes : $G\,(1,1,1)$
- Bissectrices : centre du cercle inscrit $\Omega\,(x,y,z)$ coord bar de (A,B,C)



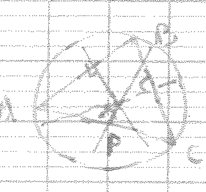
$$x = \frac{|\vec{\Omega B}, \vec{\Omega C}|}{|\vec{AB}, \vec{AC}|} \; ; \; y = \frac{|\vec{\Omega A}, \vec{\Omega C}|}{|\vec{AB}, \vec{AC}|}$$

$$z = \frac{|\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}|}{|\vec{AB}, \vec{AC}|}$$

$$\mathcal{A}_{AB\Omega} = \frac{cr}{2} \quad \mathcal{A}_{BC\Omega} = \frac{ar}{2} \quad \mathcal{A}_{AC\Omega} = \frac{br}{2}$$

$$(x,y,z) = \frac{(a,b,c)}{a+b+c}$$

- médiatrices : centre du cercle circonscrit



$$A\Omega = B\Omega = C\Omega = R$$

$$\hookrightarrow \mathcal{A}_{A\Omega C} = \frac{b^2}{4\tan\hat{B}}$$

$$\widehat{A\Omega C} = 2\hat{B} \quad \tan\hat{B} = \frac{b}{2\Omega P}$$

$$\Omega P = \frac{b}{2\tan\hat{B}}$$

$$\Omega\left(a^2/\tan\hat{A},\ b^2/\tan\hat{B},\ c^2/\tan\hat{C}\right)$$

$$\Sigma$$

- Preuve du thm de Lüroth ? (thm DA)

$\hookrightarrow P \in \mathbb{C}[X]$ $P = \prod (X - x_i)^{m_i}$

On peut se restreindre au cas scindé / simple

$$Q = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

$$\frac{Q'}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - x_i}$$

$$\theta,\ Q'(\theta) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta - x_i} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\theta - x_i}}{|\theta - x_i|^2} = 0$$

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{|\theta - x_i|^2} \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|\theta - x_i|^2} \qquad \theta \in \mathrm{Cv}(Z(Q))$$

Rq Pas besoin de distinguer le cas $\sqrt{\ }$ simple.

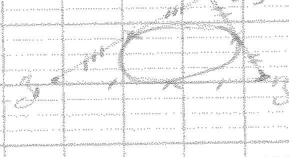
III Commentaires

- Trop de trucs pas assez développés (ex : fonc° cvxes, soit on en parle pas soit une vraie partie)
- Appli 64 : manque des props avt
- Bien définir les no° (Hahn-Banach)

IV Ce qu'on pourrait mettre

- Inévitable : bary, coord bary, applic° (ex Menelaüs et Ceva), éq° d'hyperplans (cavt Menelaüs !), convexité, lien w topologie, enveloppe cvxe, thm de projection et de sépara°

Possible : Carathéodory, théorie des ntres (Minkowski), polyèdres, fonc° cvxes, réciproque au thm de projec° (un ensemble tq pr tt pt au max un pt qui maximise la distance ⇒ alors cvxe), prolongement au thm de Lucas ($P = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, $\in \mathbb{C}[z]$,



E = ellipse de Steiner = unique ellipse tangente aux milieux des côtés

$\sqrt{\ }$ de P' sont les foyers de l'ellipse E)

dit
vu aussi
dans les
coniques.

Clefs Cuivrel

Spirafer

Combès

Zon Kegautten

+

Berge ← Luxes

Astrovek ← aptis en théorie de rhéo

Eden ← exo triangle + tirelaid clou