NOM : PINAULT Prénom : Laureline

Sujet choisi : 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Isotropie. Applications.

Références : Gourdon [Go], Grifone [Gr], Debeaumarché [D], Perrin [Pe]

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne un corps (commutatif) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2.

I Les différents points de vue sur les formes quadratiques

1 Qu'est-ce qu'une forme quadratique ? [Gr]

Idée1. Une forme linéaire peut se voir comme un polynome homogène de degré 1 en les coordonnées. On s'inspire de cette définition pour définir les formes quadratiques.

Déf2. Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est dite forme quadratique si étant donné une base $(e_i)_{i=1}^n$, $q(x)$ est un polynome homogène de degré 2 en les composantes de x dans $(e_i)_{i=1}^n$, $\forall x \in E$.

Rq3. On peut vérifier que cette définition ne dépend pas de la base $(e_i)_{i=1}^n$.

Exple4. L'application $q : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) \mapsto 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 5x_2x_3 \end{cases}$ est une forme quadratique.

2 Lien avec les formes bilinéaires symétriques [C] [D]

Déf5. Une application $b : E \times E \to \mathbb{K}$ est dit forme bilinéaire si $\forall x \in E$, $y \mapsto b(x,y)$ et $y \mapsto b(y,x)$ sont des formes linéaires. Si, de plus, ces deux applications partielles sont les mêmes, b est dite symétrique.

Exple6. Si f est une forme linéaire, $b : (x,y) \mapsto f(x)f(y)$ est une forme bilinéaire symétrique.

Prop7. On a un isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre l'ensemble des formes quadratiques et l'ensemble des formes bilinéaires symétriques :

$$\Phi : \begin{cases} q \mapsto \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right) & \text{(forme polaire)} \\ b(x,x) \leftarrow b \end{cases}$$

Exple8. $q : x \mapsto (f(x))^2$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique de l'exemple 6.

3 Expression matricielle [Go] [D]

Déf9. Si q est une forme quadratique de forme polaire b, on définit la matrice de q dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ par la matrice de sa forme polaire : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, b = (b(e_i,e_j))_{i,j=1}^n$. Cette matrice est symétrique.

Exple10. La matrice de la forme quadratique de l'exemple 4 dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5/2 \\ 1 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$

Déf11. Réciproquement, si Π est une matrice symétrique, on peut définir b_Π et q_Π les formes bilinéaires symétriques et quadratiques associées dans une certaine base $\mathcal{B}$

$$\begin{cases} b_\Pi : x,y \mapsto {}^tX\Pi Y = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i y_j \\ q_\Pi : x \mapsto {}^tX\Pi X = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} x_i x_j \end{cases}$$

où X, Y sont les vecteurs représentant x et y dans la base $\mathcal{B}$ (leurs composantes sur cette base sont les $(x_i)_{i=1}^n$ et les $(y_i)_{i=1}^n$).

Prop12. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors, en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ on a : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\, q = {}^tP\, \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q\, P$

4 Le cas réel

Déf13. Une forme quadratique réelle est dite positive (resp. définie positive) si $\forall x \in E^{(\setminus\{0\})}$ $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) > 0$). Elle correspond alors à une matrice symétrique positive (resp. définie positive).

Rq14. Une telle forme (définie positive) permet de munir E d'une structure d'espace euclidien et d'une topologie.

II Les zéros d'une forme quadratique

1 Isotropie. [Gr]

Prop/Def 15. L'ensemble des vecteurs annulant une forme quadratique q forme un cône appelé cône isotrope de q et noté C_q.

Rq 16. Attention C_q n'est pas un espace vectoriel

Exple 17. Si $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 - x_2^2$ alors $C_q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = \pm x_2\}$. (voir annexe 1)

Exple 18. Si $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ alors $C_q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$. (voir annexe 1)

2 Interprétation géométrique : coniques et quadriques [D]

Def 19. Le cône isotrope est un ensemble de droites vectorielles et défini donc une partie de $\mathbb{P}(E)$ qu'on appelle conique (projective) si E est de dimension 3 et quadrique (projective) sinon.

Def 20. On peut alors définir les coniques et les quadriques affines sur un espace affine de dimension $n-1$ en prenant une carte affine de l'espace projectif (voir annexe 2). Ainsi une conique affine (espace affine de dimension 2) ou une quadrique affine (sinon) est définie par une équation $F(M) = Q(\vec{OM}) + L(\vec{OM}) + c = 0$ où Q est une forme quadratique et L une forme linéaire.

Exple 21. Le cercle de centre C et de rayon peut être obtenu comme section de l'exemple 18 (voir annexe 2).

Exple 22. La parabole est une section du cône isotrope de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 - x_1 x_3$ (voir annexe 2)

3 Lien avec les formes bilinéaires symétriques. [Gr]

Def 23. Si q est une forme quadratique de forme bilinéaire symétrique associée b, on peut définir leur noyau : $N_q = N_b = \mathrm{Ker}\{x \mapsto (y \mapsto b(x,y))\}$
$= \{y \in E, \forall x \in E, b(x,y) = 0\}$

Si on se donne une base B, alors $N_q = \mathrm{Ker}\, \mathrm{mat}_B\, q$

Def 24. On définit alors le rang d'une forme quadratique q : $\mathrm{rg}\, q = \dim E - \dim N_q$.
Il correspond au rang d'une matrice représentant q.

Prop 25. Si q est une forme quadratique, $N_q \subset C_q$.
Def 25 bis. q est dite dégénérée ssi $N_q \neq \{0\}$.

III Réduction d'une forme quadratique

1 Isotropie et décomposition en sous-espaces orthogonaux [Gr] [Go]

Def 26. Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux pour q si $b(x,y) = 0$ où b est la forme bilinéaire symétrique associée à q.

Def 27. Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A selon q (ou selon b) et on note $A^\perp = \{y \in E, \forall x \in E\ b(x,y) = 0\}$

Rq 28. On a $N_q = E^\perp$

Prop 29. $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N_q)$ où F est un sous espace vectoriel

Prop 30. Si F est un sous espace vectoriel de E, $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ est non isotrope (ie $F \cap F^\perp = \{0\}$)

Prop 31. Toute forme quadratique admet une base orthogonale (ie une base $(e_i)_{i=1}^n$ telle que $\forall i \neq j$, e_i soit orthogonal à e_j).

Algo 32. On peut trouver cette base en appliquant la méthode de Gauss (voir annexe 3)

2 Classification des formes quadratiques [Gr]

a). Le cas complexe

Prop 33. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\exists\, (e_i)_{i=1}^n$ une base de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $q(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2$ où $r = \mathrm{rg}\, q$.

b). Le cas réel

Prop 34 (théorème de Sylvester). Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\exists\, (e_i)_{i=1}^n$ une base de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $q(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^r x_i^2$ où $r = \mathrm{rg}\, q$. $(p, r-p)$ est la signature de q, elle est unique.

Appli 35. Classification des coniques et des quadriques (voir annexe 4)

Appli 36 (Ellipsoïde de John). Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K où un ellipsoïde est $\{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$ pour une forme quadratique définie positive q. DEV 1

c). Le cas des corps finis [Pe]

Prop 37. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ un corps fini, si on note $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$, $\exists\, (e_i)_{i=1}^n$ une base de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $q(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2$ ou $q(x) = \sum_{i=1}^{r-1} x_i^2 + \alpha x_r^2$

IV Groupe orthogonal associé à une forme quadratique [Gr] [Pe]

Def 38. Soit q une forme quadratique non dégénérée de forme bilinéaire symétrique associée b et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exists!\, f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$ $b(f(x), y) = b(x, f^*(y))$.

Prop 39 (Def). $O(q) = \{f \in \mathcal{L}(E), \forall x \in E\ q(f(x)) = q(x)\}$
$= \{f \in \mathcal{L}(E), \forall x, y \in E\ b(f(x), f(y)) = b(x,y)\}$
$= \{f \in \mathcal{L}(E), f^* \circ f = \mathrm{id}_E\}$

$O(q)$ est un groupe pour $\circ$ dit groupe orthogonal de q.

Prop 40. Si $f \in O(q)$ alors $\det f = \pm 1$.

Def 41. Pour q non dégénérée on définit :
$SO(q) = \{ f \in O(q), \det f = 1 \}$.

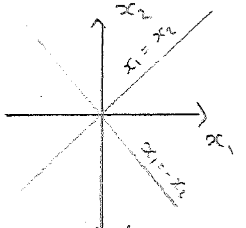
DEV 2

Prop 42. $O(q)$ est engendré par les réflexions. $\frac{1}{9}$

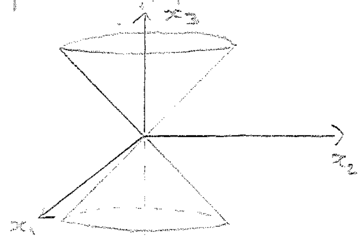
Prop 43. $SO(q)$ est engendré par les renversements pour $\dim E \geq 3$.

Interprétation 44. Dans le cas euclidien ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q définie positive), $O(q)$ s'interprète comme le groupe des isométries de E.

Annexe 1 | Cônes isotropes des exemples 17 et 18.

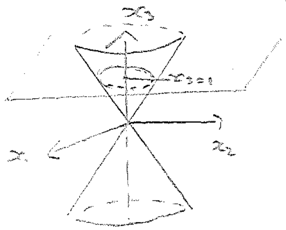


exemple 17

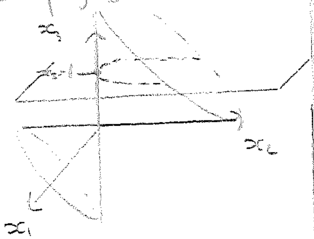


exemple 18

Annexe 2 | Coniques affines comme sections de coniques projectives



exemple 21



exemple 22

Annexe 3 | Méthode de Gauss. [Go]

INPUT : $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$

OUTPUT : $\alpha_1 \varphi_1, \dots, \alpha_n \varphi_n$, $q(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\varphi_i(x_1 \dots x_n))^2$

- pour $i = 1$ à n,
  - si $a_{ii} \neq 0$, on écrit $q(x_1 \dots x_n) = a_{ii} x_i^2 + x_i B(x_{j \neq i}) + C(x_{j \neq i})$
    - on renvoie $\alpha_i = a$ et $\varphi_i = x_1 + \frac{B(x_{j \neq i})}{a}$
    - on applique l'algorithme à $C(x_{j \neq i}) - \frac{B(x_{j \neq i})^2}{4a}$
- pour $i = 1$ à $n-1$, pour $j = i+1$ à n
  - si $a_{ij} \neq 0$, on écrit $q(x_1 \dots x_n) = a_{ij} x_i x_j + x_i B(x_{k \neq i,j}) + x_j C(x_{k \neq i,j}) + D(x_{k \neq i,j})$
    - on renvoie $\alpha_i = \alpha_j = a_{ij}/4$, $\varphi_i = x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}$
    - $\varphi_j = x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}$
    - on applique l'algorithme à $D - \frac{BC}{a}$

Annexe 4 | Classification des coniques réelles

	Signature	Coniques projective	Coniques affine
non dégénérée	(3,0) ou (0,3)	$\{0\}$	$\emptyset$
	(2,1) ou (1,2)	cône 	• ellipse (définie positive) • hyperbole (x^2-y^2) • parabole (x^2-y)
dégénérée	(1,1)	2 plans	• une droite • 2 droites sécantes • 2 droites parallèles
	(1,0) ou (0,1)	1 plan	• $\emptyset$ • une droite