Bien souligner son intérêt et le défendre du plan : égalité des dim ⟹ égalité des ev (ou dim finie) inférieur à 1…, bases de bases, bases duales, bases antéduales, …

- Formes linéaires et dualité en dimension finie
- Exemples et applications

Ref : Gourdon, Gonnord, M, FGN (ou tout bouquin de prépa)

Très lié à la dim < ∞

$\mathbb{K}$ est un corps. E est un ev de dim finie

I - Formes linéaires sur un espace vectoriel de dim finie.

1) Définitions et exemples

Def 1 Soit E un K-ev de dimension n, alors une application linéaire de E dans K est une forme linéaire. On note $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ le dual de E (l'ensemble des formes linéaires).

Rem 2 Si $\varphi \in E^*$, on note parfois, pour $x \in E$, $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$

Ex 3 Dans K^n, si $a_1, \dots, a_n \in K$ alors $\varphi : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est une forme linéaire

Ex 4 Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors e_i^* défini par $\begin{cases} e_i^*(e_i) = 1 \\ e_i^*(e_j) = 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$ est la i-ème forme linéaire coordonnée

Ex 5 Dans $M_n(K)$, Tr est une forme linéaire

Ex 6 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $\forall x \in U$, $d_x f \in (\mathbb{R}^n)^*$.

2) Bases duales et antéduales

Théorème 7 Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, alors $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée sa base duale

Cor 8 $\dim E = \dim E^*$ donc $E \simeq E^*$

Rem 9 Cet isomorphisme n'est pas canonique

C-ex 10 Si E est euclidien, alors l'isomorphisme peut être canonique, donné par $x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle)$

dès qu'on a une forme quadr. déf. alors en prenant la forme polaire on a un isom. canonique.

Ex 11 Dans $M_n(\mathbb{K})$, toute forme linéaire s'écrit $X \mapsto Tr(MX)$ où $M \in M_n(\mathbb{R})$.
De plus si $f \in M_n(\mathbb{K})^*$ vérifie $f(XY) = f(YX)$, $\forall (X,Y) \in M_n(\mathbb{K})$ alors f est colinéaire à la trace.
De plus tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre GL_n

DEV 1

fait un peu somme décevant moyen

Théorème 12 Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : E^* \to K$ définie par $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$. Alors $\tilde{x} \in E^{**}$ et $x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme de E dans E^{**}

canonique cette fois

Rem 13 E^{**} est appellé le bidual de E.

Théorème 14 Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*, alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^* = f_i$. C'est la base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$

Rq $E = F \oplus F^\perp$ (moi Hilbert)

155 213

Exemple 15 Soit $a \in \mathbb{K}$, alors dans $\mathbb{K}_n[X]$, $\varphi_k^*(P) = P^{(k)}(a)$ $(k\in[\![0,n]\!])$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$ de base antéduale $\varphi_k = \frac{(X-a)^k}{k!}$

Exemple 16 Soient $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ distincts, alors $\varphi_k(P) = P(a_k)$, $k\in[\![0,n]\!]$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$ de base antéduale les polynômes interpolateurs de Lagrange
$\left(L_k(X) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}\right)$ $k\in[\![0,n]\!]$

3. Topologie sur E^* ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Théorème 17 Soit $f\in E^*$ où E est un evn. ~~Les~~ assertions suivantes sont équivalentes
i) f continue ii) f continue en 0
iii) $\exists C>0$, $\forall x\in E$, $|f(x)|\leq C\|x\|$

Théorème 18 En dim. finie, toute forme linéaire est continue

Appli 19 Sur $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $C>0$, $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\,dt \leq C \max_{i\in[\![0,n]\!]} |P(i)|$

II - Orthogonalité et transpositions

1- orthogonalité

Def 20 • $x\in E$ et $f\in E^*$ sont dits orthogonaux si et seulement si $f(x)=0$
• Si $A\subset E$, on note $A^\perp = \{f\in E^*, \forall x\in A, f(x)=0\}$ l'orthogonal de A. C'est un s-ev. de E^*
• Si $B\subset E^*$, on note $B^\circ = \{x\in E, \forall f\in B, f(x)=0\}$ l'orthogonal de B, c'est un s-ev de E.

Rem 21 • $\{f\}^\circ = \operatorname{Ker} f$
• $A^\perp = \operatorname{Vect}(A)^\perp$ • $B^\circ = \operatorname{Vect}(B)^\circ$

Prop 22 • Si $A_1\subset A_2\subset E$ alors $A_2^\perp\subset A_1^\perp$
• Si $B_1\subset B_2\subset E^*$, alors $B_2^\circ\subset B_1^\circ$

Théorème 23
• Si F est un s-ev de E, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$
• Si G est un s-ev de E^* alors $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$

Prop 24 ~~• A~~ Soient A_1, A_2 deux sev de E, B_1 et B_2 deux sev de E^* alors
i) $(A_1+A_2)^\perp = A_1^\perp\cap A_2^\perp$ ii) $(A_1\cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$
iii) $(B_1+B_2)^\circ = B_1^\circ\cap B_2^\circ$ iv) $(B_1\cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

2- hyperplans

Def 25 Si E est un espace vectoriel, ~~et~~ un hyperplan de H est un s-ev de codimension 1

Théorème 26 Soit $f\in E^*\setminus\{0\}$, alors Ker f est un hyperplan de E. Réciproquement, pour tout hyperplan

géom analytique

159 313

H de E s'écrit $H = \ker \varphi$ avec $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ avec unicité à un scalaire près

Théorème 27

- Soit E un K-ev de dimension n et $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ avec $r = rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ alors $F = \{x \in E, \forall i, \varphi_i(x) = 0\}$ est un sev de dim $n-r$
- Si F est un sev de dim ~~n~~ q alors il existe $n-q$ formes linéaires indépendantes $\varphi_1, \dots \varphi_{n-q}$ telles que $F = \{x \in E, \forall i, \varphi_i(x) = 0\}$

App 28 (Annexe) Calcul d'équations de sev

Théorème 29 (Hahn-Banach) ($K = \mathbb{R}$)
Soit F un sev de E et $f \in F^*$, il existe $g \in E^*$ tel que $g|_F = f$ et $\|g\| = \|f\|$

Théorème 30 (Hahn-Banach géométrique)
Soient A et B deux parties convexes disjointes de $\mathbb{R}^n$.
i) si A est ouvert, $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $\sup_A \varphi \leq \inf_B \varphi$
ii) si B est fermé et A compact, $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $\sup_A \varphi < \inf_B \varphi$

App 31 L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité B de $M_n(\mathbb{R})$ pour $\|\!|\cdot|\!\|_2$. Ses points extrémaux sont les matrices orthogonales.

Dev 2

3. Application transposée

Def 32 Soient E et F deux K-ev et $u \in \mathcal{L}(E,F)$
Pour tout f dans F^*, $f \circ u \in E^*$. L'application $\begin{cases} F^* \to E^* \\ f \mapsto f \circ u \end{cases}$ est appelée application transposée de u, notée ${}^t u$.

Prop 33 (i) $rg\, u = rg\, {}^t u$ (ii) $\operatorname{im} {}^t u = (\ker u)^\perp$
(iii) $\ker({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^\perp$

Prop 34 Soit F un sev de E et $u \in \mathcal{L}(E)$
$u(F) \subset F \Leftrightarrow {}^t u(F^\perp) \subset F^\perp$

App 35
- diagonalisation des endomorphismes symétriques réels
- trigonalisation des matrices carrées complexes

Prop 36 si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

4. Applications matricielle

Prop 37 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, ~~et~~ B et B' des bases de E et F, et B^*, B'^* leurs bases duales
Alors ${}^t(\operatorname{Mat}_{B,B'} f) = \operatorname{Mat}_{B'^*, B^*}({}^t f)$

Prop 38 Soit B ~~base~~ et B' deux bases de E, B^* et B'^* leurs bases duales. Alors si P est la matrice de passage de B dans B', celle de B^* dans B'^* est ${}^t P^{-1}$

App 39 Calcul de base duale.

en parler + de la défin. & paramètre d'applic

plutôt cool

peut se mettre avt HB (+ algébrique)

4/4

Determiner des équations de s-ev

Soit E un ev de dim n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base.

Soit $F \subseteq E$ engendré par $\left(f_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,i} e_j\right)_{i \in [\![1,r]\!]}$, supposés libres

Alors $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in F$ ssi

$$\left| \begin{array}{c|c} (\lambda_{j,i})_{\substack{i \in [\![1,r]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}} & \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \end{array} \right|$$

est de rang r

Un pivot de Gauss donne alors

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & & (*) & F_1(x) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & F_r(x) \\ & & & F_{r+1}(x) \\ & 0 & & \vdots \\ & & & F_n(x) \end{array} \right|$$

où les équations de F sont

$$\begin{cases} F_{r+1}(x) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x) = 0 \end{cases}$$

<u>exemple</u> $E = \mathbb{R}^3$

$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{matrix} \right| \longrightarrow \left| \begin{matrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & y+z-x \end{matrix} \right|$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ x = y+z \right\}$$

<u>Commentaire</u> :

- peut parler d'appl diff (en français ... [illegible]
- [illegible]

(déf qui sert bien ici transformation de forme ...)

- dim finie ms c-ex en dim ∞ = pertinents.

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dim. finie. Exples & applications

I. Dvt 2 ($\mathrm{Conv}(O(n)) = B(0,1) = B$ de $M_n(\mathbb{R})$).

+ pts extrémaux

- $\subset$: ok car $\mathrm{conv}(O(n)) = \bigcap$ des cvxes contenant $O(n)$ et B en est un car convexe + $O(n) \Rightarrow$ isométries
- $\supset$: Par l'absurde. On sup. $\Pi \in B \setminus \mathrm{Conv}(O(n))$.
  En dim $< \infty$, $\mathrm{Conv}(O(n))$ compact car $O(n)$ l'est et $\{\Pi\}$ fermé.
  Donc $\exists \varphi \in M_n(\mathbb{R})^*$, $\sup_{O \in \mathrm{conv}(O(n))} \varphi(O) < \varphi(\Pi)$ (HB).
  Soit $\varphi \in M_n(\mathbb{R})^*$ $\varphi = \mathrm{Tr}(A\,\cdot)$. On écrit $A = \Omega S$ une décomp. polaire. Soit (e_i) une bon de vp de S
  $\varphi(\Pi) = \mathrm{tr}(A\Pi) = \mathrm{tr}(\Pi A) = \sum \langle \Pi A e_i, e_i \rangle = \sum \langle A e_i, {}^t\Pi e_i \rangle$
  $= \sum \langle \Omega S e_i, {}^t\Pi e_i \rangle \leqslant \sum \underbrace{\|{}^t\Pi\|_2}_{\leqslant 1 \text{ car } \Pi \in B. \text{ (pas trivial)}} \|e_i\|_2 \|\Omega S e_i\|$
  $\leqslant \sum \|S e_i\|_2$
  $\varphi(\Omega^{-1}) = \mathrm{Tr}(\Omega S \Omega^{-1}) = \mathrm{Tr}(S) = \sum \|S e_i\| \geqslant \varphi(\Pi)$
  Contradiction
- Caractérisation des pts extrémaux : (on admet que Π extr. $\Rightarrow \|\Pi x\|_2 = 1$)
  * Soit $\Pi \perp$. Mq Π est extrémale.
    On écrit $\Pi = (U+V)/2$
    $4\|x\|^2 = \|2x\|^2 = \|2\Pi x\|^2 = \|Ux + Vx\|^2 = \|Ux\|^2 + \|Vx\|^2 + 2\langle Ux, Vx \rangle$
    $\leqslant \dots$
  * ...

Au final bien mais assez long. Peut se faire comme ça ds cette leçon. La première partie ($\mathrm{Conv}(O(n)) = B$) peut faire un dvt à part entière en dvppant les trucs admis ici (eg $\varphi = \mathrm{tr}(A\,\cdot)$) et les détails (eg $\|{}^t\Pi\|_2$). Peut se recaser ds la leçon s/ les barycentres.

II. Exercices

1. Déterminer $\{u \in \mathcal{L}(E)$, u laisse stable les hyperplans$\}$?

$\{u$ laisse stable les dte$\}$ = homothétie

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Mq $(\exists X,\ AX + XA = B) \Leftrightarrow (\forall C,\ AC + CA = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(BC) = 0)$

- ($\Rightarrow$) Soit C, $AC + CA = 0$.

$$\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(AXC) + \mathrm{Tr}(XAC) = \mathrm{Tr}(XAC) + \mathrm{Tr}(XCA)$$
$$= \mathrm{Tr}(X(AC+CA)) = \mathrm{Tr}(X \times 0) = 0$$

- ($\Leftarrow$) On pose $\varphi : X \mapsto AX + XA$. On veut mq $B \in \mathrm{Im}\,\varphi$.
Soit $T : M \mapsto (N \mapsto \mathrm{tr}(MN))$. T isomorphisme.

et aussi $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset (T(\mathrm{Im}\,\varphi))^\circ$ → On a montré ($\Rightarrow$) que $\mathrm{Im}\,\varphi \subset (T(\mathrm{Ker}\,\varphi))^\circ$

On montre l'~~inclusion réciproque~~ égalité par dualité (dimension)

$$\dim((T(\mathrm{Ker}\,\varphi))^\circ) = n^2 - \dim(T(\mathrm{Ker}\,\varphi))$$
$$= n^2 - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi \quad \text{car } T \text{ isomorphisme}$$
$$= \dim \mathrm{Im}\,\varphi \quad \text{(thm du rg)}$$

cf dvt 1 → - Mq $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, $A \mapsto \mathrm{Tr}(A\,\cdot)$ est un isomorphisme.

On va mq T est injective.
On se donne $(E_{ij})_{i,j}$ la base canonique et $A = \sum a_{ij} E_{ij} \in \mathrm{Ker}\,T$.
Alors $\forall H$, $\mathrm{tr}(AH) = 0$.
Soit i_0, j_0. En particulier, pour $H = E_{i_0 j_0}$:

revoir les indices
$$0 = \mathrm{tr}(A E_{i_0 j_0}) = \sum_{i,j} a_{ij}\,\mathrm{tr}(E_{ij} E_{i_0 j_0}) = \sum_{i,j} a_{ij}\,\mathrm{tr}(\delta_{j i_0} E_{i j_0})$$
$$= \sum_i a_{i j_0}\,\mathrm{Tr}(E_{i j_0}) = a_{i_0 j_0}$$

3) Soit E ev. Soient $f_1, \dots, f_p, g$ des formes lin. sur E.
Mq $\bigcap_{i} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} g \Rightarrow g \in \operatorname{Vect}_i f_i$

- Si $p = 1$. On a $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. Mq $g = \lambda f$.
Si $g = 0$ OK. Sinon $\exists x_0$, $g(x_0) \neq 0$. Alors $f(x_0) \neq 0$.
On pose $\lambda = g(x_0) / f(x_0)$. Mq $\forall x$, $g(x) = \lambda f(x)$.
Soit $x \in E$. Si $f(x) = 0$ alors $g(x) = 0 = \lambda \times 0 = \lambda f(x)$.
Sinon $x = k + \mu x_0$ où $k \in \operatorname{Ker} f$ et $\mu \in K$
(f forme linéaire $\Rightarrow \ker f$ = hyperplan)
Donc $f(x) = \mu f(x_0)$ et $g(x) = \mu g(x_0) = \mu \lambda f(x_0) = \lambda f(x)$.

- On raisonne par récurrence. On suppose que c'est vrai pour n et on le montre pour $n+1$.
$\bigcap_{i=1}^{n+1} \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} g \qquad \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i \Big|_{\operatorname{Ker} f_{n+1}} \subset \operatorname{Ker} g \Big|_{\operatorname{Ker} f_{n+1}}$
Donc sur $\operatorname{Ker} f_{n+1}$, $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ ie $\forall x \in \operatorname{Ker} f_{n+1}, (g - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i)(x) = 0$
$\Rightarrow \operatorname{Ker} f_{n+1} \subset \operatorname{Ker}(g - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i)$
Par le cas $p=1$, $\exists \lambda_{n+1}$, $g - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \lambda_{n+1} f_{n+1}$

4) $f_1, \dots, f_n : K \to K$
Mq $(f_1, \dots, f_n)$ libre de K^n ssi $\exists x_1, \dots, x_n \in K$, $M = (f_i(x_j))$ inv

- Si M est inversible on mq $(f_1, \dots, f_n)$ libre
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\sum \lambda_i f_i = 0$. ${}^tM \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \lambda_i f_i(x_1) \\ \vdots \\ \sum \lambda_i f_i(x_n) \end{pmatrix} = 0$ donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$
car M inv $\Rightarrow {}^tM$ inv.

- On suppose que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre $\Rightarrow V = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ de dim n
donc V^* aussi
Soit $ev : \begin{cases} K \to \overbrace{(V \to K)}^{V^*} \\ x \mapsto (f_i \mapsto f_i(x)) \end{cases}$
Mq $\operatorname{Vect}(ev(x))_{x \in K} = V^*$

Pour cela on mq $\underset{x \in K}{\mathrm{Vect}}(ev(x))^{\circ} = \{0\}$

Une fois cela fait, on a donc $(ev(a_1), \dots, ev(a_n))$ une base de V^*.

On suppose que $\forall j$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(a_j) = 0$.

$\forall j$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [ev(a_j)](f_i) = 0$

$\forall j$, $ev(a_j)\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right] = 0$

Donc $\sum \lambda_i f_i \in \bigcap \ker(ev(a_j))$ donc $\forall \varphi \in V^*$, $\varphi(\sum \lambda_i f_i) = 0$

donc $\sum \lambda_i f_i = 0$ et par liberté de f, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$