Une classe de séries lacunaires sans dérivées

Leçons concernées. $228, 241, 246, 250$.
Référence. *Analyse pour l'agrégation*, Hervé Queffélec et Claude Zuily.
Remarques. La définition des suites lacunaires n'est ici que pour rendre le développement compréhensible. Elle est bien entendu à inclure dans le plan, augmentée d'exemples et contre-exemples.
Dans la suite, on utilise la transformation de Fourier sur l'espace de Scwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, dont on ne peut pas parler dans tous les plans concernés par ce développement.

Définition 1 (Suite lacunaire)
Une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels distincts est dite séparée si pour tout entier n, la distance de λ_n au reste de la suite est non nulle, *i.e* $\mu_n := d(\lambda_n, \Lambda\backslash\{\lambda_n\}) > 0$.
La suite Λ est dite lacunaire si elle est séparée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = +\infty$.

Théorème 2 (Une classe de fonctions continues sans dérivées)
Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite lacunaire de réels, $\sum \varepsilon_n$ une série absolument convergente de complexes et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par la série normalement convergente

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}$$

Si f est dérivable en au moins un point, alors $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\mu_n})$.
Par contraposé, si $\sum \frac{1}{\mu_n} < +\infty$ et s'il existe une constante $|\varepsilon_n| > \frac{\delta}{\mu_n}$ pour tout n, alors la fonction f est partout non dérivable.

Preuve. Nous allons utiliser la structure lacunaire de f pour en caractériser les coefficients ε_n grâce au lemme suivant.

Lemme 3 Soit φ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz, de transformée de Fourier $\hat{\varphi} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itx}\mathrm{d}x$ telle que

$$\hat{\varphi}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall |x| \geqslant 1, \hat{\varphi}(x) = 0.$$

Pour tout entier n, on note $\varphi_n(t) = \mu_n\varphi_n(\mu_n t)$. On a alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_n = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda_n t}\varphi(t)\mathrm{d} \quad \text{et} \quad |\varepsilon_n| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(\frac{t}{\mu_n})||\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

Preuve. (du lemme 3) Tout d'abord, l'existence d'une telle fonction test φ est assurée, car si ψ est une fonction plateau paire à support dans $[-1, 1]$, avec $\psi(0) = \frac{1}{2\pi}$, on peut considérer $\varphi = \hat{\psi}$. La formule

d'inversion de Fourier dans l'espace de Schwartz nous donne $\hat{\varphi} = 2\pi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
On remarque alors que pour tout entier n, $\hat{\varphi}_n(x) = \hat{\varphi}(\frac{x}{\mu_n})$. De sorte que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k e^{i(\lambda_k - \lambda_n)t} \varphi_n(t) \mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varepsilon_k e^{i(\lambda_k - \lambda_n)t} \varphi_n(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k \hat{\varphi}_n(\lambda_n - \lambda_k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k \hat{\varphi}(\frac{\lambda_n - \lambda_k}{\mu_n}) = \varepsilon_n \hat{\varphi}(0) = \varepsilon_n.\end{aligned}$$

On conclue au second point du lemme en appliquant l'inégalité triangulaire et un changement de variables.

✌

On commence par traiter le cas où f est dérivable en 0 et on suppose en outre que $f(0) = f'(0) = 0$.
Le lemme 3 nous indique que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mu_n \varepsilon_n| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mu_n |f(\frac{t}{\mu_n})||\varphi(t)|}_{=: g_n(t)} \mathrm{d}t$$

La suite de fonctions mesurables $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f'(0)\varphi \equiv 0$. On va donc chercher à appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure. Au voisinnage de 0, $f(t) = o(t)$. Par conséquent, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $|t| \leqslant \delta, |f(t)| \leqslant |t|$. En outre, si $|t| > \delta$, alors

$$|f(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n| \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n|}{\delta} |t|$$

Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $|f(t)| \leqslant C|t|$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$g_n(t) \leqslant C\mu_n |\frac{t}{\mu_n}\varphi(t)| = C|t\varphi(t)| =: h(t)$$

où $h \in L^1(\mathbb{R})$, puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le théorème de convergence dominée nous donne donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n\varepsilon_n = 0$.

Dans le cas général, on suppose f dérivable au point t_0. Cherchons des constantes $a, b \in \mathbb{C}$ telles que la fonction g définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(t + t_0) - ae^{i\lambda_0 t} - be^{i\lambda_1 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon'_n e^{i\lambda_n t},$$

avec $\varepsilon'_n = \varepsilon_n e^{i\lambda_n t_0}$ si $n \geqslant 2$, est nulle et de dérivée nulle au point 0. En évaluant en 0 et en dérivant, on déduit que l'on a

$$\begin{cases} a + b = f(t_0) \\ \lambda_0 a + \lambda_1 b = -if'(t_0) \end{cases}$$

Le déterminant associé à ce système est $\lambda_1 - \lambda_0 \neq 0$ et donc de telles constantes a et b existent. En appliquant le premier cas à une telle fonction g, on conclue donc que $\varepsilon'_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\mu_n})$, et ainsi $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\frac{1}{\mu_n})$.

✌